

## V Zur baustatischen Analyse gewölbter Steinkonstruktionen

Santiago Huerta, Madrid und Karl-Eugen Kurrer, Berlin

### 1 Geschichte der Theorie ebener Gewölbe bis 1900

Das Gewölbe ist noch immer ein Rätsel der Baustatik. Seit über 300 Jahren versuchten Mathematiker, Naturwissenschaftler, Ingenieure und Architekten, das Tragverhalten von Gewölben durch baustatische Modellierung zu begreifen und zu quantifizieren. In Abschnitt 1 wird die Entwicklungsgeschichte der Gewölbetheorien von den Anfängen bis zur Durchsetzung der Elastizitätstheorie bei der baustatischen Analyse ebener, gewölbter Steinkonstruktionen um 1900 dargestellt.

#### 1.1 Begriffliches zu Gewölbe und Bogen

Das Substantiv „Bogen“, mittelhochdeutsch „boge“, althochdeutsch „bogo“, niederländisch „boog“, englisch „bow“ gehört zu dem Verb „biegen“ und bedeutet demnach, „Biegung, Gebogenes“. Im „Deutschen Wörterbuch“ von *Jakob Grimm* (1785–1863) und *Wilhelm Grimm* (1786–1859) steht für das Substantiv: „Boge(n) ist nun das krumme, das krumm gehende, springende“ ([1], S. 91), welches seine Wurzel im Verb „biegen“ hat. Ein Bogen im baustatischen Sinne ist demzufolge ein einfach konkav gekrümmtes Tragwerk, dessen Lastabtragung über biege feste Baustoffe wie etwa Holz, Stahl und Stahlbeton erfolgt. Bei Belastung eines Bogen-tragwerks wird ein praktisch nicht zu vernachlässigender Anteil der äußeren Arbeit in innere Biegearbeit umgewandelt. So bestimmt das Verb „biegen“ nicht nur etymologisch das Substantiv „Bogen“, sondern charakterisiert das Bogentragwerk auch von der Seite der Lastabtragung auf anschauliche und einprägsame Weise.

Wesentlich komplizierter ist der Zusammenhang zwischen dem Tragverhalten des Gewölbes und der sprachhistorischen Entwicklung des Substantivs „Gewölbe“. Das „Deutsche Wörterbuch“ von *Jakob* und *Wilhelm Grimm* analysiert in 27 Spalten den komplexen Verwendungszusammenhang dieses Substantivs in Geschichte und Gegenwart der Bau fachsprache, der Alltagssprache und der

Literatursprache. Es ist der römische Steinbau in seinem Gegensatz zum Holzbau, und im Besonderen die römische „camera“, d. h. zunächst die gewölbte Decke, die das Substantiv „Gewölbe“ (althochdeutsch: „giwelbi“, mittelhochdeutsch: „gewelbe“, englisch: „vault“, französisch: „voûte“, niederländisch: „gewelf“) entwickelt haben: „an sich nur die gewölbte decke kennzeichnend (...) wird ‚camera‘ zum umfassenden begriff für den ganzen raum, der von der decke umspannt wird. und in diesem bedeutungsübergang, der sich an ‚gewölbe‘ in gleicher weise wiederholt, wird erst die möglichkeit zu den meisten verwendungen gegeben, die für das letztere als charakteristisch empfunden werden“ ([2], S. 6646).

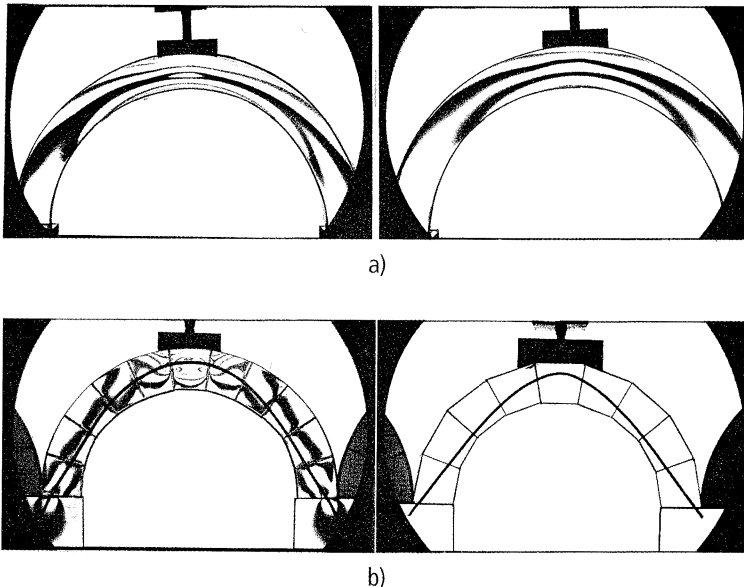
Erst in der Bau fachsprache des 18. Jahrhunderts verliert der Raumbegriff gegenüber dem Flächenbegriff in Definitionen des Begriffs „Gewölbe“ schnell an Bedeutung. Ursache hierfür dürften die im Jahrhundert der Aufklärung entstehenden Gewölbetheorien sein, die erste Übergänge vom Tragwerk zur Tragstruktur als einem unter dem Aspekt der Tragfunktion abstrahierten Gewölbe-modell schufen – mithin einen quantitativen Zugriff auf die Lastabtragung im Gewölbe erlaubten. Als Komplement dieser Begriffsschärfung wirkte die mit *Galilei* anhebende Balkentheorie. In *Zedlers „Universal-Lexikon“* aus dem Jahre 1735 beispielsweise wird unter „Gewölbe“ ganz im Sinne des Flächenbegriffs „eine nach einem Bogen von Steinen formierte Decke“ ([3], S. 1393) verstanden und von der biegebeanspruchten Holzdecke geschieden. *Ersch* und *Gruber* erweitern 1857 den Definitionsbereich auf der Basis des Flächenbegriffs, indem sie neben Hau- und Backsteinen auch Bruchsteinmaterial, das mit Mörtel ausgegossen wird, als Baustoffe zum Wölben erwähnen ([4], S. 129). Hier deutet sich schon die um 1850 von Frankreich ausgehende stoffliche Homogenisierung des Gewölbetragswerks an, die im Beton- und Stahlbetonbau im letzten Drittel des 19. Jahrhunderts den Übergang von den an der Materialität des Tragwerks „Gewölbe“ haftenden Theorien zur Elastizitätstheorie der Gewölbe von *Winkler*, *Castigliano*, *Perrodil* u. a., und von dort zur

Theorie des elastischen Bogens bautechnisch vorzeichnete. Logischer Kern dieses historischen Prozesses ist der Übergang von der Tragstruktur zum statischen System des elastischen Bogens etwa als konkav gekrümmter, an den Widerlagern eingespannter elastischer Stab. Dennoch hielt sich die Kompositabildung in der Bezeichnung von Bogentragwerken mit dem Substantiv „Gewölbe“ bis in die jüngste Vergangenheit: „Stahlgewölbe und Stahlbetongewölbe“ ([5], S. 43 ff.). Dies wider die Einsicht, dass solche Tragwerke nicht nur auf Druck, sondern als lineares Kontinuum auch auf Biegung arbeiten. Die begriffliche Differenz zwischen „Bogen“ und „Gewölbe“ kann mit den spannungsoptischen Untersuchungen *Bert Heinrichs* belegt werden (s. [6], S. 37 ff.). Während die parallelen Isochromaten beim homogenen Bogen auf eine hohe Biegebeanspruchung hinweisen (Bild 1 a), ist die Tragqualität des Gewölbes durch reine Druckfortpflanzung in Richtung der Stützlinie charakterisiert (Bild 1 b).

Ein Tragwerk ist dann ein Gewölbe, wenn die zur Sicherung der Raumüberspannung erforderliche Tragfunktion allein durch druckfeste Baustoffe mit vernachlässigbarer Zugfestigkeit fügend verwirklicht wird. *Weber* kritisiert diese Definition und entwickelt eine auf dem Flächenbegriff der Differenzialgeometrie basierende ([7], S. 30–37). Die Erfindung des Gewölbes ist, ähnlich der des Rades, nicht datierbar. Im Berliner „Museum für

Vor- und Frühgeschichte“ kann eine über 5000-jährige mesopotamische Grabkammer bewundert werden, die als Tonnengewölbe mit einer Spannweite von etwas über 1 m ausgebildet ist. „Falsches und echtes Gewölbe“, schreibt *Ernst Heinrich*, „dürften in der Verwendung über Kanälen und über Gräften etwa gleich alt sein, wenn uns auch die eine Art schon in der Uruk-Zeit, die andere erst in der Mesilim-Zeit bekannt wird. Beide bleiben (...) bis in die Zeit der Seleukiden, in Gebrauch“ ([8], S. 339). Sicherlich gibt es verschiedene historisch-logische Entwicklungsstränge, welche im Gewölbe kulminieren. So kann man sich vorstellen, dass beim Bau eines falschen Gewölbes oder Kragsteingewölbes die oberen Steine nach innen abkippten und sich zum Gewölbe verkeilten (Bild 2 a). Zwischen zwei gegeneinander gestellte Steinplatten könnten zur Verminderung der Plattenlänge ein oder mehrere Keile eingefügt worden sein (Bild 2 b). Das gleiche technische Motiv nach einer Verminderung der Balkenlänge und damit der Steigerung der Biegefestigkeit könnte die Baumeister vom Architrav zum Gewölbe geführt haben (Bild 2 c).

Bis zum Gewölbe mit Fugenschnitt der Etrusker sind sicherlich über 2000 Jahre vergangen. Von den ersten Gewölbetheorien *Fabris* und *La Hire*s im ausgehenden 17. Jahrhundert bis zur Elastizitätstheorie des Gewölbes sind weniger als 200 Jahre vergangen. Die auf der Traglasttheorie



**Bild 1.** Spannungsoptische Untersuchung eines Modellbogens und eines Modellgewölbes unter mittlerer Einzellast. Isochromaten  
a) des Modellbogens und  
b) des Modellgewölbes ([6], S. 37 u. 38)

basierende Analyse von Gewölben fasste erst in den 1960er-Jahren Fuß.

## 1.2 Gewölbte Steinkonstruktionen als Gegenstand baustatischer Theoriebildung

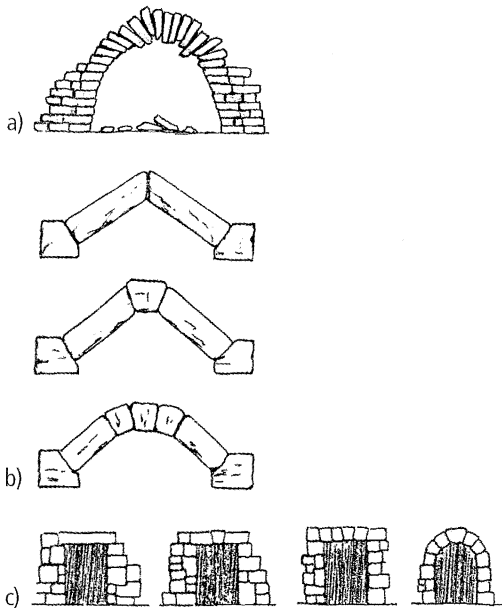
Mauerwerk war bis Anfang des 20. Jahrhunderts die vorherrschende Bauart in der Welt. Heutzutage werden fast keine gewölbten Steinkonstruktionen mehr errichtet, doch verfügen wir über ein architektonisches Erbe, das erhaltenswert ist. In vielen Fällen geht es dabei nur um „kosmetische“ Erhaltungsmaßnahmen, aber manchmal stellt uns ein Bauwerk vor scheinbare oder tatsächliche statische Probleme. Auch kann es vorkommen, dass ein Tragwerk gestiegenen Belastungen ausgesetzt wird und seine Sicherheit unter den neuen Nutzungsbedingungen überprüft werden muss. In der letztgenannten Situation wird eine baustatische Analyse benötigt.

Hierbei stellt sich die Frage, ob sich gemauerte Tragwerke grundlegend von modernen Stahl-, Stahlbeton- oder Brettstichholz-Tragwerken unterscheiden. Die gewöhnliche Baustatik für Skelett-, Fachwerk- oder Schalenkonstruktionen ist bei der Untersuchung von Mauerwerkskon-

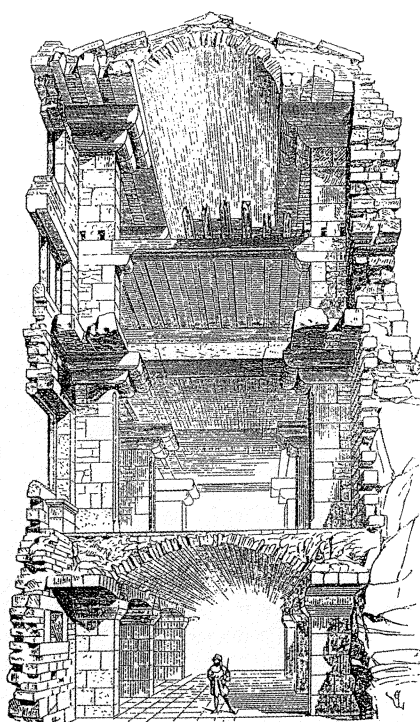
struktionen zumeist nutzlos. Bild 3 a zeigt den Schnitt eines mittelalterlichen Gebäudes. Zunächst einmal lassen sich keine linearen Stütz- und Trägerelemente ausmachen. Die tragenden Bauteile sind hier zwei- oder dreidimensional, nicht eindimensional bzw. „linear“ wie bei den Modellen der Theorie der Stabwerke, oder „dünn“ wie bei den Modellen der gewöhnlichen Schalentheorie.

Betrachtet man nun das Konstruktionsmaterial näher, so sieht man zwar von außen ein regelmäßiges Natursteinmauerwerk, aber die innere Struktur ist in Wirklichkeit wesentlich komplizierter und unregelmäßiger. Die Wand z. B. besteht aus zweischaligem Natursteinmauerwerk mit einem dazwischenliegenden Kern aus Schutt und Mörtel. Das Wandmaterial ist also in sich selbst schon strukturiert. Das Problem ist hier, welche der üblichen Materialannahmen – Stetigkeit, Isotropie, Elastizität oder Inelastizität – anzuwenden sind? Bild 3 b zeigt nur einige Mauerwerkstypen. Wenn beispielsweise versucht werden soll, einen Elastizitätsmodul zu definieren, dann stellt sich die Frage: Wo? An der äußeren oder inneren Schicht, oder am Kern? Des Weiteren weisen gemauerte Gebäude zumeist Risse auf. Diese Risse verlaufen oft durch die gesamte Wand- und Gewölbedicke. Möglicherweise wird ein Riss an der Oberfläche etwa durch einen Putz verdeckt, doch im Inneren ist er da, verborgen und unerkant. Was schließlich die Randbedingungen angeht, so ist allgemein bekannt, dass die Fundamente der meisten gemauerten Gebäude merkliche Setzungen aufweisen; sie sind weit entfernt vom Modell des starr gelagerten Fundaments, das in den Baustatiklehrbüchern immer wieder referiert wird.

Dies alles bedeutet natürlich nicht, dass gewölbte Steinkonstruktionen nicht planbar oder analysierbar sind. Natürlich war zum Bau des Pantheons, der Hagia Sophia oder der gotischen Kathedralen eine Art von Konstruktionsplan nötig; diese Bauwerke wurden weder von Laien errichtet, noch waren sie ein Zufallsprodukt. Es gab auch tatsächlich eine traditionelle „Scientia“ der Tragwerke, die im Wesentlichen auf geometrischen Proportionsregeln basierte. Diese „vorwissenschaftliche“ Theorie wurde von Huerta bereits ausführlich behandelt [11, 12]. Im Folgenden wird gezeigt, wie diese Bauwerke im Rahmen der Baustatik analysiert werden können. Die Schwierigkeit, ja, die Unmöglichkeit einer direkten Anwendung der üblichen Annahmen aus der modernen Baustatik wurde oben kurz skizziert. Es wird ein anderer Ansatz benötigt.

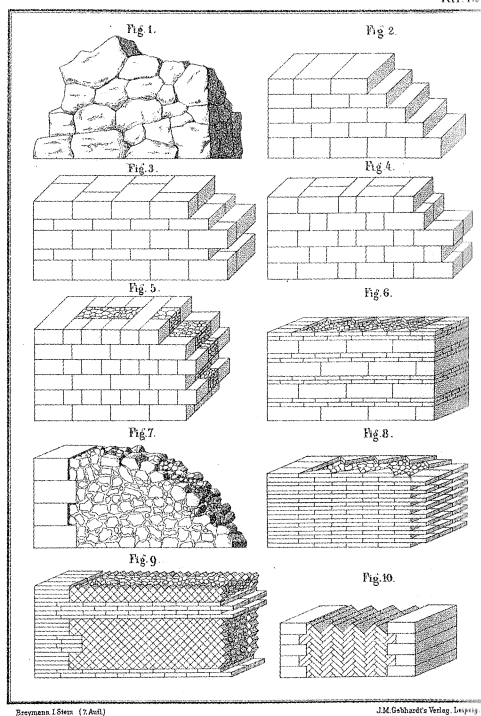


**Bild 2.** Historisch-logische Entwicklung vom a) Kragsteingewölbe, b) Dreigelenkssystem und c) Steinbalken zum Gewölbe ([6], S. 24 u. 25)



a)

**Bild 3.** a) Querschnittsansicht des Tragwerks eines mittelalterlichen Gebäudes [9]; b) verschiedene Mauerwerkstypen [10]



b)

Glücklicherweise gibt es bereits eine Theorie gewölbter Steinkonstruktionen. Sie entstand Ende des 17. Jahrhunderts und wurde während des 18. und 19. Jahrhunderts weiterentwickelt, nur um dann vergessen zu werden und Mitte des 20. Jahrhunderts schließlich ganz aus den Lehrbüchern und Hörsälen zu verschwinden. Die Elastizitätstheorie fegte die damals als „alte Theorie“ bezeichnete Gewölbetheorie hinweg, da diese in der Tat keine Hilfe bei der Analyse moderner Tragstrukturen wie z.B. Stahlfachwerkbögen bot. Gleichwohl wurde die alte Theorie während des gesamten 19. Jahrhunderts für die Planung von gewölbten Steinkonstruktionen eingesetzt und ebenfalls erfolgreich auf die Untersuchung gemauerter Gebäude angewandt; insbesondere um die Standsicherheit der neuen, neogotischen Mauerwerkbauten des ausgehenden 19. und des 20. Jahrhunderts statisch nachzuweisen. Die Wiederentdeckung der alten Gewölbetheorien begann in den 1930er-Jahren, als von den Ingenieuren konkrete Aussagen über die Tragfähigkeit mittelalterlicher Brücken für höhere

Lasten gefordert wurden. In den 1960er-Jahren schließlich wurden wesentliche Erkenntnisse der alten Gewölbetheorien in das Gebäude der Traglasttheorie eingefügt. Es war Professor *Jacques Heyman* von der University of Cambridge (UK), der schon damals klar erkannte, dass die vom Standpunkt der klassischen Elastizitätstheorie sich ergebenden Unzulänglichkeiten gar keine Unzulänglichkeiten sind, und dass sich die Richtigkeit und der Erfolg der alten Gewölbetheorien aus der Perspektive einer Traglasttheorie der Mauerwerkskonstruktionen erklären lassen. Diese Traglasttheorie der Mauerwerkskonstruktionen ist i. W. das Werk *Heymans*; von ihrer Basis aus ist ein tieferes Verständnis des Tragverhaltens gemauerter Tragsysteme möglich. Allerdings wurden mit der Computerisierung, der exponentiellen Verbilligung von Rechenleistung und dem Aufkommen moderner multifunktionaler FEM-Programmpakete, die explizit oder implizit mit dem Versprechen einhergingen, das „universelle Verfahren“ für jede beliebige Tragwerksart darzustellen, die Sicht auf die tatsäch-



liche Situation und das Potenzial der Traglasttheorie der Mauerwerkskonstruktionen verdeckt.

### 1.3 Die Geschichte der Bogentheorie

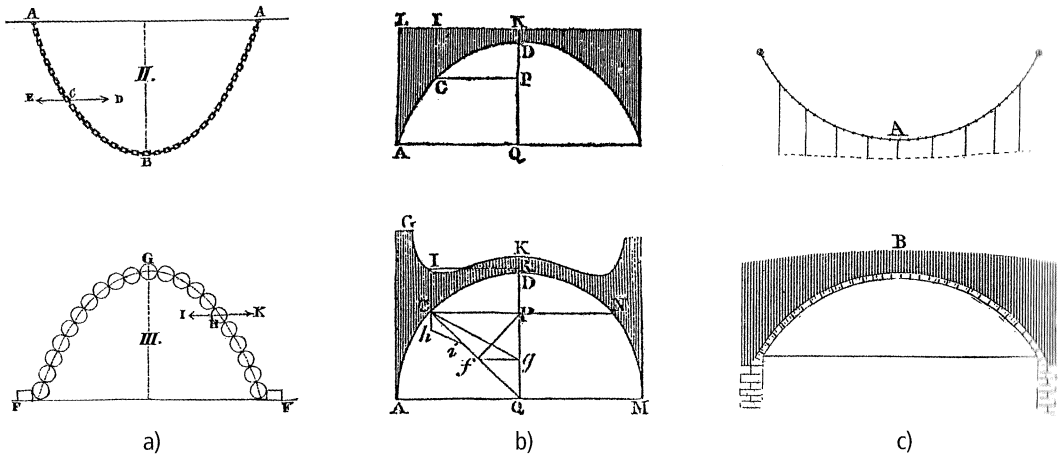
Die wichtigsten Entwicklungslinien der Gewölbetheorie sind allgemein bekannt. Die Arbeiten von *Poncelet* [13] und *Winkler* [14] geben einen guten Überblick über die frühen Theorien vom 17. bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts. Diese Theorien beziehen sich auf gewölbte Steinkonstruktionen und werden hier unter dem Begriff „Gewölbetheorie“ subsumiert. Die Theorie des elastischen Bogens dagegen entwickelte sich erst im Laufe des 19. Jahrhunderts und wurde zunächst nur auf Eisen- und Holzbögen angewandt (s. [15, 16]); nach den 1880er-Jahren fand sie sowohl bei Bögen als auch bei Gewölben Anwendung. Eine detaillierte Untersuchung der Entwicklung der Theorie des elastischen Bogens findet sich bei *Mairle* [17]; einen guten Überblick über ihre Hauptentwicklungslinien geben *Hertwig* [18], *Timoshenko* [19] und *Charlton* [20]. Die Geschichte der Gewölbetheorie aus Sicht der Traglasttheorie untersuchte *Heyman* [21, 22]; ihm ist es auch gelungen, die Gewölbetheorie in den Wissenskorpus der modernen Baustatik einzuordnen. *Kurrer* behandelt die Geschichte der Gewölbetheorien und der Theorie des elastischen Bogens [23, 24]. In Teil B seiner 1981 fertiggestellten Diplomarbeit wendet *Kurrer* u. a. historische Gewölbetheorien auf die Berechnung einer Betonbogenbrücke an und weist nach, dass der Horizontalschub aus Eigengewicht nach der ersten Gewölbetheorie *La Hires* (1695) nur 7,7% über dem nach der Elastizitätstheorie berechneten liegt ([23], Teil B, S. 108). Sein 2002 erschienenes Buch „Geschichte der Baustatik“ [25] enthält einen Gesamtüberblick und diskutiert den epistemologischen Status der Gewölbetheorien. *Foce* schließlich hat eine neue historische Übersicht erarbeitet und, was noch wichtiger ist, eine umfassende Bibliographie der Primärquellen zusammengestellt [26]. Der folgende kurze Gang durch die Geschichte dient als Einführung in die Gewölbetheorie.

### 1.4 England: Die Theorie der umgekehrten Kettenlinie

Kein Geringerer als *Robert Hooke* formulierte im Jahre 1670 das Gewölbeprobem: Was ist die ideale Form des Gewölbes, und wie groß ist der Gewölbeschub, der auf die Widerlager einwirkt [27]? Die Lösung präsentierte er 1675 [28] in

Form eines Anagramms, das dechiffriert wie folgt lautet: „Wie die biegeschlaaffe Linie hängt, so wird umgekehrt das stabile Gewölbe stehen“ (Bild 4 a). Gewölbe und hängende Ketten haben dieselbe Statik – das ist *Hookes* geniale Idee: das nach der umgekehrten Kettenlinie geformte Gewölbe wurde später Stützliniengewölbe genannt. Im Jahre 1697 wiederholt der Mathematiker *David Gregory* [29] in einem Essay über die „Catenaria“ (Kettenlinien) die Aussage *Hookes* und fügt eine wesentliche Bemerkung hinzu: „Die wahre Form eines Gewölbes ist allein die Kettenlinie. Trägt ein Gewölbe von anderer Form, so geschieht dies nur, weil es in seiner Dicke Kettenlinien einschließt.“ Gab *Hooke* die Richtung für die Lösung des Formproblems der Gewölbestatik an (1. Hauptaufgabe der Stützlinientheorie), so antizipierte *Gregory* mit seiner ergänzenden Bemerkung die 3. Hauptaufgabe der Stützlinientheorie: Ein Gewölbe, dessen Schwerachse nicht nach der Stützlinie geformt ist, ist dann und nur dann stabil, wenn die aus der gegebenen Belastungsfunktion folgende Stützlinie gänzlich innerhalb des Gewölbeprofils verläuft. Leider blieb *Gregorys* ergänzende Bemerkung unbeachtet.

Nach *Hooke* suchten die englischen Mathematiker und Ingenieure lange Zeit nach Lösungen für die 1. Hauptaufgabe der Stützlinientheorie, d. h. sie ermittelten für eine gegebene Belastungsfunktion die zugehörige Stützlinie. So gaben z. B. *Emerson* [30] und *Hutton* [31, 32] Stützliniengewölbe für bestimmte Belastungsfunktionen an. Allerdings ist das Gewölbe mit konstanter Dicke, das nur sein eigenes Gewicht trägt, ein rein theoretisches Problem. Die Belastung eines realen Gewölbes wird durch den Verlauf der Gewölbeleibung und des Gewölberückens definiert. Es gab zwei Grundprobleme: erstens die Ermittlung der Geometrie des Gewölberückens für eine gegebene Gewölbeleibung und zweitens die Ermittlung der Geometrie der Gewölbeleibung für einen gegebenen Gewölberücken (Bild 4 b). Die Lösung lässt sich rechnerisch ermitteln, aber *Robison* schlug 1801 [33] einen Weg zur experimentellen Ermittlung des Kurvenverlaufs vor (Bild 4 c). Physikalisch wird hier das Gewölbe als Gleichgewichtskonfiguration von Keilsteinen interpretiert, deren Fugen stets senkrecht zur Gewölbeleibung stehen. Der Ansatz führte zu einer bestimmten, unveränderlichen Form für die Übertragung der Druckkräfte im Gewölbe: der Gewölbeleibung. Die Theorie liefert keine Informationen über die Gewölbedicke und kann häufig auftretende Phänomene wie etwa die Rissbildung in Gewölben nicht erklären.



**Bild 4.** Die zwei Hauptprobleme der Theorie der umgekehrten Kettenlinie: a) Ermittlung der Gewölbeform für konstante Belastung, b) Ermittlung der Gewölbebelastung für einen gegebenen Gewölberücken [32], c) Robisons 1801 vorgeschlagene Lösungsmodell für den zweiten Fall (Zeichnung von Young [34])

## 1.5 Frankreich: Von der Bruchbildanalyse zur Kantungstheorie

In Frankreich findet sich der erste Beitrag zur Gewölbetheorie in dem 1695 veröffentlichten „Traité de mécanique“ von *La Hire* [35]. Die von *La Hire* aufgeworfene Problemstellung lautet, welche Belastungsfunktion ein aus reibungsfreien Keilsteinen bestehendes Halbkreisgewölbe im Gleichgewicht hält. Dahinter verbirgt sich die 2. Hauptaufgabe der Stützlinientheorie: Für eine gegebene Gewölbeschwerachse ist die Belastungsfunktion derart zu ermitteln, dass die Gewölbeschwerachse mit der Stützlinie zusammenfällt. Zur Lösung des Problems benutzte *La Hire* das Kräftepolygon und fand, dass bei stabilen Gewölben die Auflast, d. h. die Belastungsfunktion, unendlich sein muss (s. a. Bild 4 b unten). *La Hire* wusste, dass in der Praxis Reibung das Gleiten der Keilsteine verhindern würde, aber dennoch galt eine vom Scheitel zu den Kämpfern hin ansteigende Gewölbedicke seither als bewährte Praxis.

Der wichtigste Beitrag von *La Hire* wurde fast zwei Jahrzehnte später im Jahre 1712 veröffentlicht [36]. Diese Arbeit zielte auf die Ermittlung des Gewölbeschubs ab, um aus diesem die Widerlagerstärke berechnen zu können. *La Hire* hatte erkannt, dass bei einem kollabierten Gewölbe oder Tonnengewölbe der Kämpferbereich des Gewölbes mit dem Widerlager vereint bleibt und der obere Teil des Gewölbes wie ein Keil wirkt; die Grenze zwischen diesen Starrkörpern wird

durch die Bruchfuge des Gewölbes oder Tonnengewölbes markiert. Der Gewölbeschub muss die Bruchfuge tangential zur Gewölbebelastung durchstoßen – damit ist die Richtung des Gewölbeschubs festgelegt. Der Betrag des Gewölbeschubs folgt aus der Gleichgewichtsbedingung für den keilförmigen oberen Teil (Bild 5 a). Danach kann die Widerlagerstärke aus dem Hebelgesetz für den Winkelhebel LHT werden. Die Lage der Bruchfuge ließ *La Hire* jedoch unbestimmt, und diese Unbestimmtheit stand der praktischen Anwendung seiner Theorie im Wege.

*Bélidor* wandte als Erster die Theorie von *La Hire* im Jahre 1725 zur Berechnung einer Tabelle an, aus der sich die Widerlagerstärke von Pulvermagazinen ermitteln ließ [37]. 1729 veröffentlichte er sein Buch „La science des Ingénieurs“ [38], in dem er den Ansatz von *La Hire* so modifizierte, dass er von jedem Ingenieur unmittelbar angewandt werden konnte: Er ging von einer unter  $45^\circ$  geneigten Bruchfuge aus und verlagerte den Durchstoßpunkt des Gewölbeschubs von der Gewölbebelastung in die Gewölbemitte (Bild 5 b). Auf diese Weise eliminierte *Bélidor* die Unbestimmtheit in *La Hires* Theorie und schuf ein einfaches Verfahren zur Berechnung der Widerlagerstärke für Tonnengewölbe (Bild 5 b) und beliebige Kombinationen aus Tonnengewölben (Bild 5 c). Für Gewölbe mit korbogenförmiger Bogenleibung modifizierte *Perronet* die Lage der Bruchfuge [39]: Er ordnete sie dort an, wo sich die Krümmung ändert, und ließ dort den Gewölbeschub tangential an der Gewölbebelastung an-

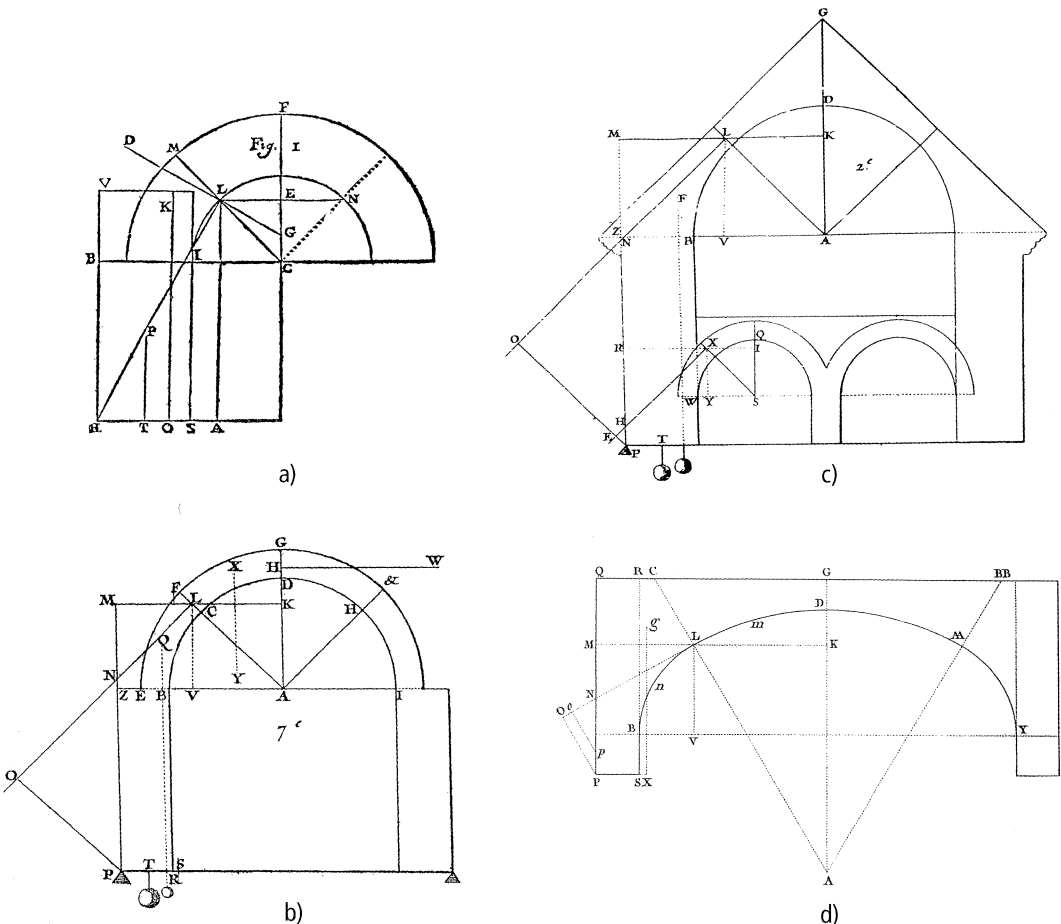
greifen (Bild 5 d). Die Theorie von *La Hire* und *Béldor* fand in Kontinentaleuropa während des restlichen 18. Jahrhunderts fast uneingeschränkte Zustimmung und findet sich noch in einigen Handbüchern des 19. Jahrhunderts wie etwa dem von *Sganzin* [40].

Die Gewölbetheorie von *La Hire* und *Béldor* ist eine Keiltheorie mit reibungsfreien Bruchfugen; verhält sich doch der obere Teil des Gewölbes wie ein Keil, der senkrecht zu den Ebenen der Bruchfugen die beiden Widerlager nach außen drückt. Die Theorie ergab Widerlagerstärken, die gut mit den Proportionsregeln der alten Baumeister übereinstimmten; es wurde kein Sicherheitsfaktor angesetzt.

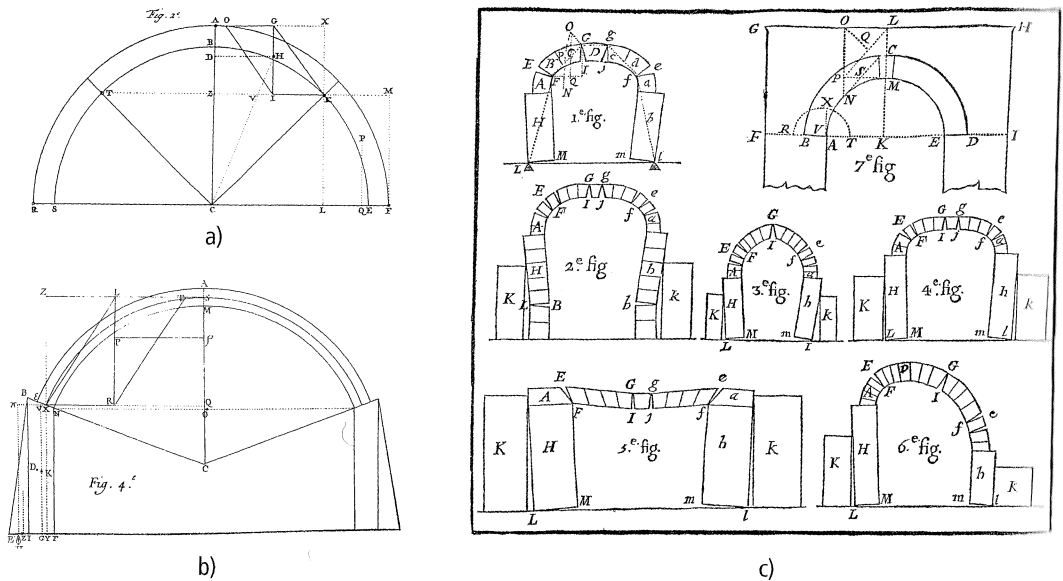
1730 veröffentlichte *Couplet* [41] die erste Abhandlung über Gewölbe, die Reibungseffekte

mitberücksichtigte. Seine entscheidende Einsicht bestand darin, dass sich ein Gelenk ausbildet, wenn die Stützlinie die Bogenleibung berührt; daher kam er in sehr guter Näherung zu korrekten Minimaldicken von kreisförmigen Gewölben (Bild 6 a). Zur Berechnung der Widerlagerstärke fixierte er den Gewölbeschub am Scheitel (Horizontalschub) und an den Kämpfern jeweils in der Fugenmitte und bestimmte das globale Gleichgewicht des Halbkreisgewölbes (Bild 6 b).

Die von *Danyzy* 1732 [42] an kleinen Mörtelmodellen oder Gewölben angestellten Versuche wiesen die Richtigkeit des Ansatzes von *Couplet* nach. Sie zeigten auf überzeugende Weise, dass Gleiten unmöglich ist und sich Gelenke zwischen den Steinen ausbilden (Bild 6 c). Im Jahre 1800



**Bild 5.** Theorie von *La Hire* zur Ermittlung des Gewölbeschubs: a) ursprüngliche Theorie [36], b) Modifikation von *Béldor* und c) Analyse eines Gewölbebauwerks [38], d) Anpassung der Theorie *La Hires* von *Perronet* für Gewölbe mit korbogenförmiger Gewölbeleibung [39]



**Bild 6.** Couplets Gewölbetheorie mit Reibung: a) Minimaldicke eines Halbkreisgewölbes und b) Widerlagerstärke für ein Kreissegmentgewölbe [41], c) Tests an Mörtelmodellen zur Veranschaulichung der Bruchbilder von Gewölben [42]

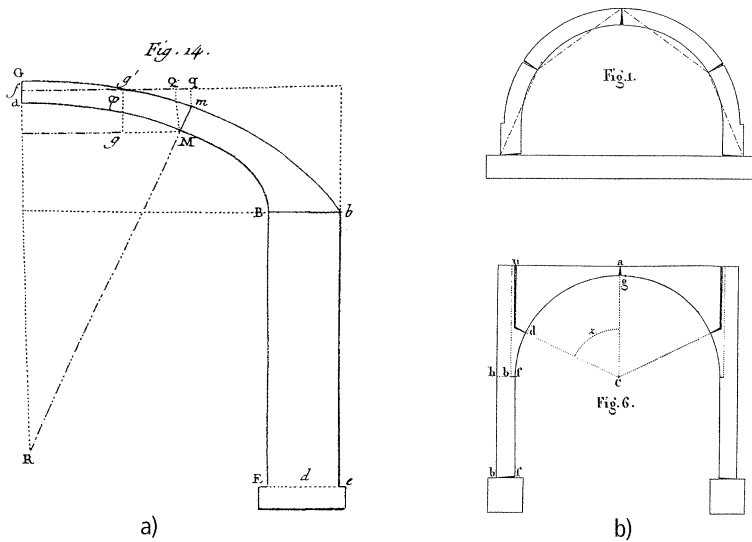
schließlich stellte *Boistard* [43] eine umfassende Testreihe mit Gewölben einer Spannweite von 2,60 m an, die als maßgeblich betrachtet wurde. Schon 1773 stellte *Coulomb* [21, 44] ein auf der Extremwertberechnung der Differenzialrechnung basierendes Verfahren vor, mit dessen Hilfe die Lage der Bruchfuge (mM in Bild 7 a) und der Horizontalschub berechnet werden konnte. *Coulomb* betrachtete alle möglichen Versagensarten an der Fuge: Gleiten nach oben oder nach unten sowie Kanten nach oben oder unten. Wie *Couplet* stellte er fest, dass in der Praxis aufgrund der hohen Reibungskoeffizienten von Mauerwerk nur ein Versagen durch Kanten relevant war. Deshalb wurde *Coulombs* Gewölbetheorie im deutschsprachigen Raum als „Kantungstheorie“ bezeichnet.

*Coulombs* Abhandlung blieb fast 50 Jahre lang vergessen. Erst 1820 entdeckte der französische Ingenieur *Audoy* die Kantungstheorie *Coulomb* wieder [45], stellte Formeln für die gebräuchlichsten Gewölbeprofile auf und wertete sie aus (s. Fig. 1 in Bild 7 b). Bei Ansatz der berechneten Gewölbeschübe auf die Widerlager stellte er fest, dass die erhaltenen Widerlagerstärken viel zu klein waren und deshalb ein Sicherheitsfaktor eingeführt werden musste (s. Fig. 6 in Bild 7 b). *Audoy* schlug daraufhin vor, den Horizontalschub an der Scheitelfuge mit einem bestimmten nume-

rischen Wert zu multiplizieren (Sicherheitsfaktor), um eine sichere Widerlagerstärke zu erhalten.

Der theoretische Ansatz von *Coulomb* wurde auch von *Navier* übernommen und vollendet. So gab *Navier* in seinen „Leçons“ aus dem Jahre 1826 [46] Formeln für Gewölbe mit beliebiger Form an. Gleichwohl waren die Formeln von *Audoy* für praktische Anwendungen zu kompliziert und für *Naviers* Integrale existierte nur selten eine exakte Lösung. Einige Ingenieure wie *Petit* 1835 [47] und *Michon* 1848 [48] berechneten daraufhin neue Tabellen für Gewölbeschübe und Widerlagerstärken. *Poncelet* entwickelte 1835 ein grafisches Verfahren, das zwar recht mühsam war, aber doch eine gewisse Zeitersparnis versprach [49].

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass sich der französische Ansatz im Wesentlichen um die Bestimmung der Lage der Bruchfuge drehte, um den für ein Gewölbe gegebener Form auf die Widerlager einwirkenden Gewölbeschub zu berechnen: Das System aus Gewölbe und Widerlager befand sich dann in einer Versagenssituation mit fünf Gelenken – einem am Schlussstein, zwei an den Bruchfugen und zwei an der Grundfläche der Widerlager (Fig. 1 in Bild 7 b). Der daraus folgende Gewölbeschub wurde daraufhin mit einem bestimmten Faktor (in der Regel 2) multi-



**Bild 7.** a) *Coulomb's* Ermittlung der Lage der Bruchfuge [44]; b) Anwendung der *Coulomb'schen* Theorie durch *Audoy* [45]

pliziert, um die Widerlagerstärke zu berechnen. Die Theorie behandelte weder das Problem der Form und Dicke von Gewölben noch die Schnittkräfte im Gewölbe.

## 1.6 Die Stützlinientheorie

Offensichtlich unterschieden sich die Theorie der umgekehrten Kettenlinie und die Theorie der Bruchfugen grundlegend voneinander, und doch wurden beide mit Erfolg eingesetzt. Um zu einem vollständigen Verständnis des Tragverhaltens von Gewölben zu gelangen, war eine neue Idee erforderlich. Als solche erwies sich das Konzept der Stützlinie. Die Stützlinie ist der geometrische Ort der Durchstoßpunkte der resultierenden inneren Kraft in den Gewölbefugen; dabei muss die resultierende innere Kraft nicht senkrecht zur Gewölbefuge stehen, sondern nur innerhalb des Reibungskegels liegen. Da die Gewölbequerschnitte nur Druckspannungen aufnehmen können, muss die Stützlinie für die gegebene Belastungsfunktion vollständig im Gewölbeprofil verlaufen. Dies ist die 3. und wichtigste Hauptaufgabe der Stützlinientheorie. Die drei Hauptaufgaben der Stützlinientheorie formulierte *Gerstner* 1831 ([50], S. 406); er führte auch den Begriff „Stützlinie“ in die deutsche Sprache ein.

Das Konzept der Stützlinie wurde deshalb in den deutschsprachigen Ländern traditionell *Gerstner* 1831 [50], in Frankreich *Méry* 1840 [51] und in England *Moseley* 1835 [52] zugeschrieben (s. [23, 24, 53]). Doch der Erste, der in seinem

Artikel „Bridge“ für die „Encyclopaedia Britannica“ eine vollständige Gewölbetheorie auf Basis des Konzepts der Stützlinie vorlegte, war *Thomas Young* im Jahre 1817 [54]. *Huerta* analysierte *Youngs* Stützlinientheorie, entdeckte ihre antizipative Kraft und ordnete sie in die Entwicklungsgeschichte der Gewölbetheorie ein [55]. Leider war *Youngs* Beitrag in dem für ihn typischen lakonischen und schwer verständlichen Stil verfasst und wurde deshalb nicht rezipiert.

Sowohl *Moseley* als auch *Méry* setzten die Stützlinien mit der Ausbildung von Versagensmechanismen in Verbindung. *Méry* verglich die Ergebnisse der von *Boistard* im Jahre 1800 [43] durchgeführten Traglastversuche und interpretierte sie im Kontext der neuen Theorie, indem er Stützlinien für den Versagenszustand der Modelle zeichnete und außerdem die Minimaldicke der entsprechenden Gewölbe berechnete (Bild 8). Sein Konzept hatte eine Verschmelzung der Kan- tungs- mit der Stützlinientheorie zur Folge. Daran schlossen sich weitere Arbeiten an. In England schlug *Barlow* 1843 [56] ein grafisches Verfahren zum Zeichnen der Stützlinie vor und entwickelte eine Reihe raffinierter Experimente, um zu demonstrieren, dass eine solche Linie „in der Praxis existiert“. Die Abhandlung von *Snell* aus dem Jahre 1846 [57] verdient es ebenfalls, zitiert zu werden.

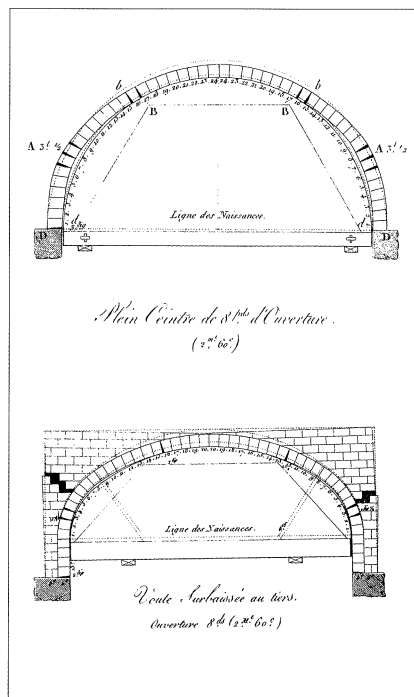
Die Stützlinientheorie stellte einen enormen Fortschritt beim Verständnis der Konstruktion und Berechnung von Gewölben dar. Außerdem verdeutlichte sie nicht nur die von *Coulomb* voraus-

gesetzte Existenz zweier Grenzwerte für den Horizontalschub, sondern vermittelte auch die Erkenntnis, dass zwischen diesen beiden Grenzwerten unendlich viele Stützlinien im Gewölbeprofil gefunden werden können, die alle die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen. Méry brachte dies in einer der Zeichnungen seiner Abhandlung deutlich zum Ausdruck (Bild 9 a). Was ist dann aber die tatsächliche oder wahre Stützlinie [58]?

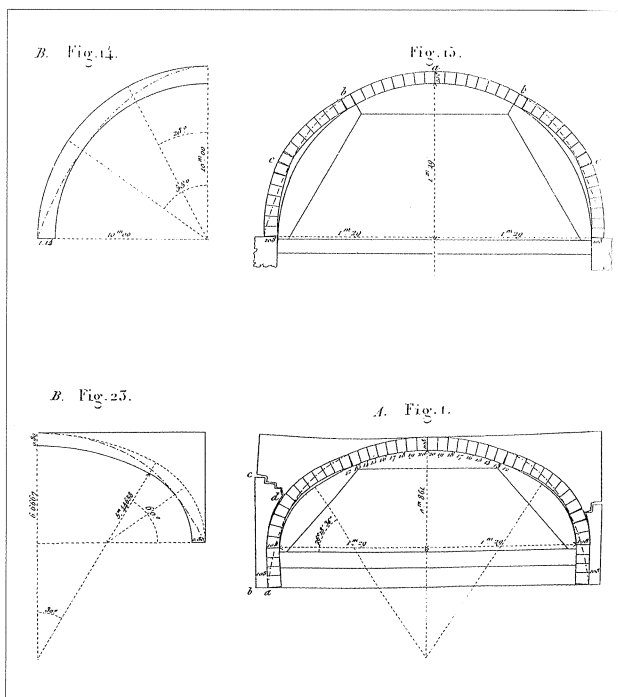
Moseley war der Erste, der versuchte, das Problem zu lösen, indem er sein „Prinzip des geringsten Widerstandes“ anwandte, das er allgemein im Jahre 1833 formulierte [59]. 1843 stellte er fest, dass die wahre Stützlinie diejenige mit minimalem Horizontalschub ist [60]. In Deutschland gründete Scheffler [61] seine 1857 veröffentlichte Gewölbetheorie auf dem Ansatz von Moseley; diesen erweiterte und illustrierte er durch zahlreiche Analysen und Anwendungsbeispiele (Bild 9 b). Schefflers Gewölbetheorie beeinflusste zahlreiche Autoren in Europa und Nordamerika, aber nicht alle hielten sie für richtig. So versuchte beispielsweise Culmann 1866 [62], die Position der Stützlinie zu fixieren, und

stellte dazu sein „Prinzip der kleinsten Beanspruchung“ auf, welches besagt, dass von allen möglichen Linien die tatsächliche oder wahre Linie diejenige ist, deren Abweichung von der Gewölbeachse minimal ist.

Eine weitere Lösung bestand darin, das Gewölbe so zu konstruieren, dass die Gewölbeachse mit der Stützlinie zusammenfällt (Stützliniengewölbe). Die Lösung der 1. Hauptaufgabe der Stützlinientheorie bedeutete in gewissem Sinne eine Rückkehr zu der alten Hooke'schen Gewölbetheorie. In Deutschland folgte diesem Ansatz Gotthilf Hagen [63], in Frankreich berechnete Yvon Villarceau [64] Gewölbeprofile für Brücken, die hydrostatischen Lasten ausgesetzt sind (die Füllung wirkt auf den Gewölberücken wie ein Fluid). Im letzten Viertel des 19. Jahrhunderts kam eine drastischere Lösung zur Anwendung. Es wurden drei Gelenke in das Gewölbe eingebaut, sodass die Lage der Stützlinie festgelegt war: Das im Rahmen der Elastizitätstheorie dreifach statisch unbestimmte Gewölbe mit unendlich vielen statisch möglichen Stützlinien wurde dadurch statisch bestimmt.

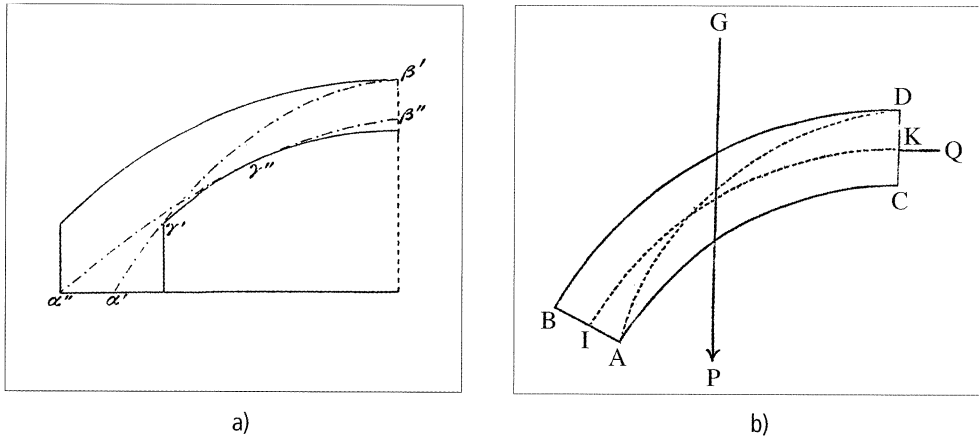


a)



b)

**Bild 8.** a) Boistards Traglastversuche an Gewölben mit 2,60 m Spannweite [55], b) Mérys Interpretation der Versuchsergebnisse von Boistard mithilfe der Stützlinientheorie [51]



**Bild 9.** a) Stützlinien für den maximalen und minimalen Horizontalschub [51], b) Schefflers wahre Stützlinie mit minimalem Horizontalschub [61]

## 1.7 Die elastische Analyse von Gewölben

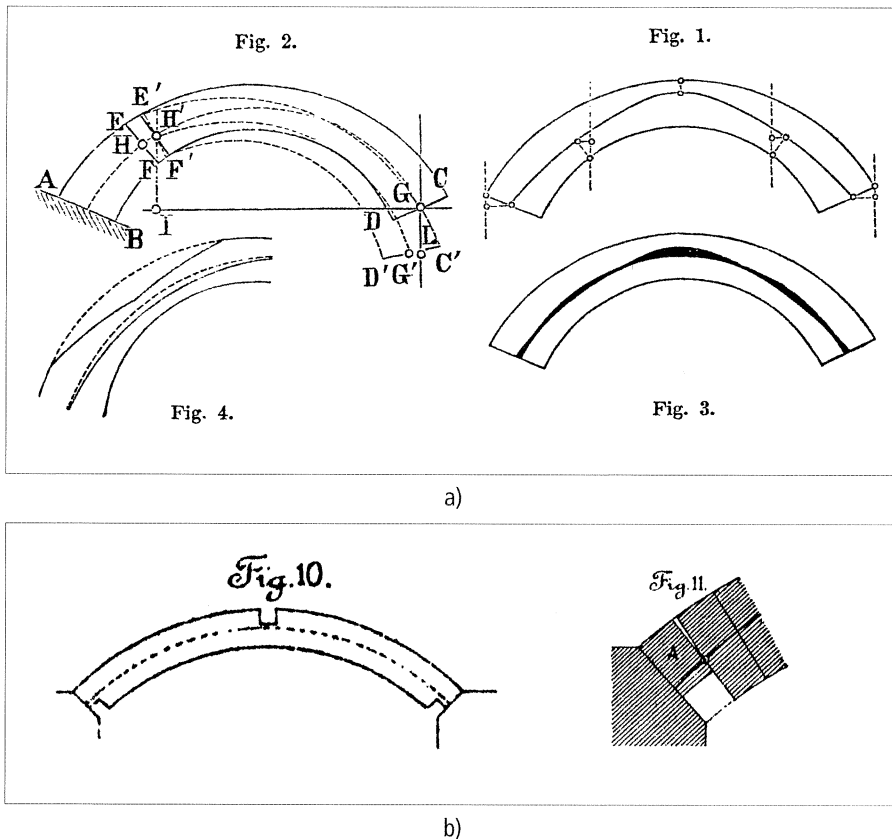
Bereits im Jahre 1852 schlug *Poncelet* [13] vor, das Gewölbe als elastischen Bogen zu modellieren. Die Theorie des elastischen Bogens war zu diesem Zeitpunkt hinreichend weit entwickelt. *Naviers* „Leçons“ aus dem Jahre 1826 [46] umfassten z. B. die elastische Analyse parabolischer Bögen, und *Bresse* hatte 1848 [65] die elastische Analyse für einen Zweigelenkbogen aus Eisen veröffentlicht. *Bresses* wichtigster Beitrag sollte aber erst 1854 [66] erscheinen (s. [20, 25]).

Die Elastizitätstheorie war verfügbar, warum sollte man also *Poncelets* Vorschlag nicht folgen? Dennoch dauerte es fast zwanzig Jahre, bis die Ingenieure dies auch taten. Der Grund dafür war offensichtlich der Unterschied zwischen der realen Tragstruktur des Gewölbes und den idealen Eigenschaften des statischen Systems eines elastischen Bogens. In den Ingenieur-Handbüchern wurden elastische Bögen (aus Holz oder Eisen) für gewöhnlich getrennt von den als Starrkörpern begriffenen Gewölben behandelt.

Die erste Berechnung eines Gewölbes nach der Elastizitätstheorie legte wahrscheinlich 1860 der spanische Ingenieur *Eduardo Saavedra* vor [67]. *Rankine* [68], *Winkler* [69] und andere behandelten das Problem in den 1860er-Jahren. Die erste vollständige Behandlung des Problems gibt *Winkler* im Jahre 1879 [14]. Ebenfalls 1879 benutzte *Castigliano* [70] die Elastizitätstheorie zur Berechnung des Gewölbes der *Ponte Mosca* in Turin, wobei er von Mauerwerk ohne Zugfestigkeit ausging.

*Winkler* behandelte das Problem der Zuweisung definierter Materialeigenschaften und Randbedingungen bei realen Gewölben. Das Gewölbe unterliegt Störungen: Unvollständig ausgehärteter Mörtel, Temperaturänderungen, nachgiebige Lehrgerüste während des Baus und vor allem das Nachgeben der Widerlager nach Abbau des Lehrgerüsts führen zu sichtbaren Rissen und erheblichen Veränderungen des Stützlinienverlaufs. *Winkler* schlug daraufhin vor, das Gewölbe für einen bestimmten Idealfall zu berechnen: Der Mörtel ist in allen Fugen gleichförmig und vollständig ausgehärtet, das Lehrgerüst ist völlig starr, die Temperatur ist gleichbleibend und die Widerlager sind unendlich starr, d. h. das Gewölbe ist an den beiden Kämpfern eingespannt. *Winkler* bezeichnete diesen Zustand des Gewölbes als den „normalen Zustand“. Die Berechnung des Gewölbes in diesem „normalen Zustand“ unter Zuhilfenahme der Elastizitätstheorie liefert als Ergebnis „die richtige Stützlinie“. *Winkler* führt aus, dass die nach der Elastizitätstheorie berechnete Stützlinie diejenige Stützlinie ist, deren Abweichung von der Gewölbeachse minimal ist (Bild 10 a). Im Anschluss gibt *Winkler* eine Reihe von Anweisungen, die darauf abzielten, die Stützlinie in dieser Lage zu halten, d. h. die Auswirkungen der Störungen zu umgehen (Bild 10 b).

*Engesser* behandelte 1880 [71] die Auswirkungen des Nachgebens der Widerlager auf die Lage der Stützlinie. Er erläuterte die Schritte zur Ermittlung der Stützlinie in dieser Situation und schlussfolgerte, dass sich die Stützlinie auf der „Suche“ nach der mit der Höhe des Gewölbequer-



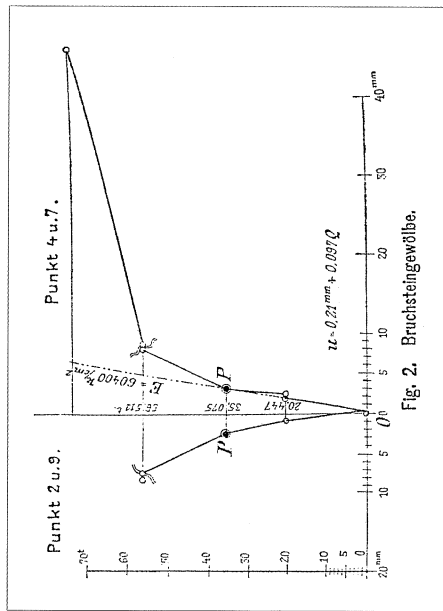
**Bild 10.** a) Ermittlung der „wahren“ Stützlinie, b) praktische Maßnahmen zur Verringerung des Einflusses von Störungen [14]

schnitts kompatiblen Position minimalen Horizontalschubs nach oben verlagert.

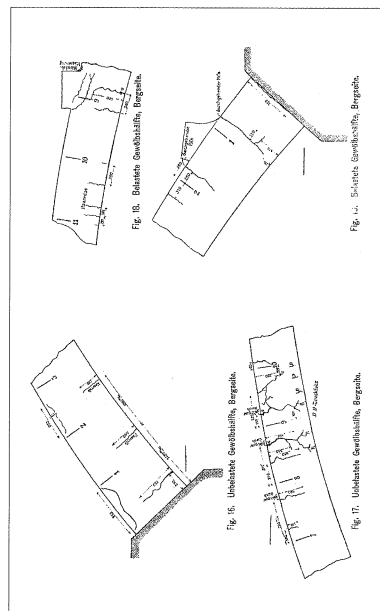
Ungeachtet der Richtigkeit von *Engessers* Ausführungen und des nicht zu übersehenden Einflusses der Störungen im „normalen“ Zustand wurde von den Ingenieuren der elastische Ansatz als der Beste akzeptiert. Er stimmte mit der neuen Elastizitätstheorie überein und machte Schluss mit dem beunruhigenden Vorhandensein unendlich vieler Lösungen. Wie *Hertwig* aufzeigte [18], tendierten nach *Winkler* alle neuen Beiträge zur Theorie des elastischen Bogens zu einer Vereinfachung des Rechenvorgangs durch geschickte Wahl der Unbekannten. Im Jahre 1895 schließlich stellte der „Österreichische Ingenieur- und Architektenverein“ [72] Versuche an Gewölben und Bögen mit einer Spannweite von 23 m an, die als maßgebend betrachtet wurden. Man beobachtete an den Gewölben, dass bis zu einem bestimmten Belastungswert keine Risse auftraten, wobei die Verformungen in sehr guter Näherung

proportional zur Belastung waren. Bei weiterer Laststeigerung kam es zu größeren Verformungen, Rissen und nichtproportionalen Verschiebungen, bis das Gewölbe schließlich versagte. Die Art der Risse und die Stützlinien weisen auf die Ausbildung von Versagensmechanismen (Bild 11a–c) hin, die *Danyzy* und *Boistard* 100 Jahre zuvor beschrieben hatten. In der Last-Verformungs-Kurve ist die Traglast deutlich markiert (Bild 11 d). Die österreichischen Ingenieure konzentrierten ihre Aufmerksamkeit allerdings nur auf den ersten Teil der Last-Verformungs-Kurve, die nahezu geradlinig verlief, was ein linear-elastisches Verhalten des Gewölbes „demonstrierte“. Darüber hinaus wurden Gewölbe-materialien und deren Elastizitätsmodule geprüft; auf der anderen Seite ermöglichte die elastische Bogentheorie aus den beobachteten Verschiebungen die Bestimmung des Elastizitätsmoduls. Der Unterschied war enorm: Die Gewölbe waren wesentlich elastischer, als von den Materialprüfun-

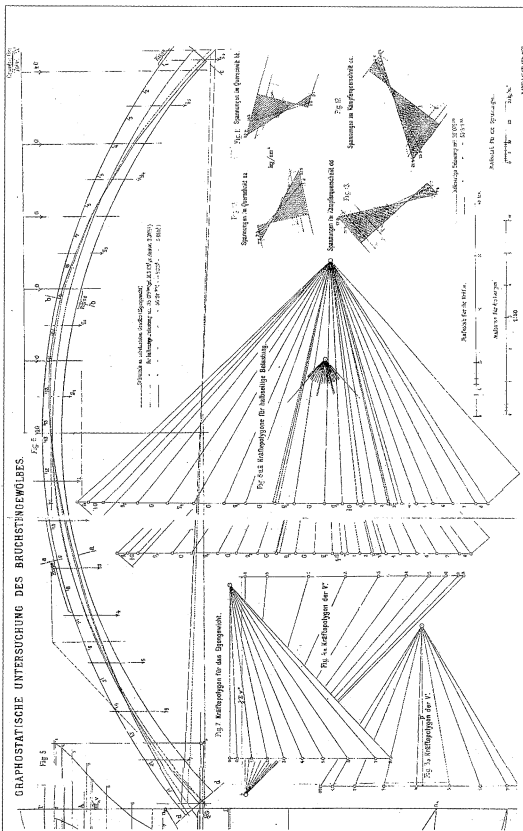




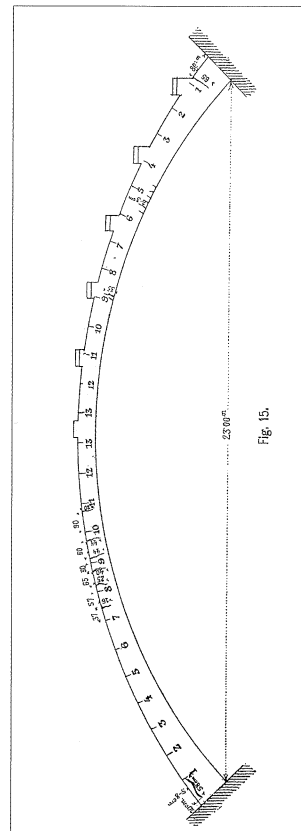
d)



c)



a)



b)

**Bild 11.** Tests an einem Gewölbe mit 23 m Spannweite: a) bis c) Rissbildung und Stützlinie, d) Last-Verformungs-Kurve [72]

gen vorausgesagt worden war – darauf wies *Séjourné* hin ([73], Band 3, S. 374).

Der Gewölbeausschuss des „Österreichischen Ingenieur- und Architekten-Verein“ gab daraufhin einige grobe Zahlenwerte für den Elastizitätsmodul an, die bei der Berechnung von Gewölben aus den in den Prüfungen eingesetzten Materialien verwendet werden sollten; und sprach außerdem Empfehlungen aus, die darauf hinausliefen, die von *Winkler* konstatierten Störungen zu vermeiden.

## 1.8 Die grafische Statik – ein praxisbezogener Ansatz

Die elastische Analyse von Gewölben wurde damals als der beste Ansatz betrachtet, da man ihr zuschrieb, über die Position der „wahren“ Stützlinie und die tatsächlichen Schnittkräfte und Spannungen im Gewölbequerschnitt korrekt Auskunft zu geben. In der Praxis bestand das Vorgehen jedoch üblicherweise darin, die Standsicherheit durch eine grafostatische Untersuchung zu überprüfen. Ein Gewölbe galt als sicher, wenn es möglich war, innerhalb des mittleren Drittels des Gewölbeprofils eine Stützlinie einzuzeichnen; dies ist die geometrische Bedingung dafür, dass sämtliche Gewölbequerschnitte nur Druckspannungen ausgesetzt sind, wie *Young* schon 1807 zeigen konnte [34].

*Rankine* stellte 1858 [74] folgendes Theorem auf: „Die Standsicherheit eines Gewölbes ist gesichert, wenn sich (...) eine aus der gegebenen Belastungsfunktion folgende Stützlinie durch das mittlere Drittel sämtlicher Gewölbequerschnitte ziehen lässt“. In der Tat gab es keine Möglichkeit zur Rissbildung, wenn der Durchstoßpunkt der resultierenden Schnittkraft in der Gewölbefuge in das mittlere Drittel der Gewölbefuge fällt. Gleichwohl konnte die Unmöglichkeit der Existenz einer weiteren Stützlinie, die zu einem Versagensmechanismus führt, nicht bewiesen werden.

Es wurde oben gezeigt, dass um 1850 einige Verfahren zur grafischen Konstruktion von Stützlinien entwickelt wurden (*Méry*, *Barlow*, *Snell*, *Scheffler*); diese gestatteten es aber nicht, zu einer bestimmten Reihe von Belastungsfunktionen eine vollständige Klasse von Stützlinien zu finden. Ein allgemeiner Weg zur einfachen Handhabung des Zeichenvorgangs war auf die separate Verwendung von Seil- und Kräftepolygonen angewiesen. *Rankine* [74] war der Erste, dem es gelang, die Beziehung zwischen Stützlinien und Seilpolygonen mit wissenschaftlicher Strenge aufzudecken, die Unterschiede zu benennen und anzumerken,

dass sich grafische Verfahren vorteilhaft einsetzen lassen – auch wenn er selbst für die Analyse von Gewölben und Bögen analytische Verfahren bevorzugte.

Systematisch wurde die grafische Analyse von Tragwerken im Jahre 1866 von *Culmann* [62] vorgeschlagen, und er war es auch, der die Verwendung von Seil- und Kräftepolygonen bei der Analyse von Gewölben popularisierte. Dies ergab einfache, praktische Verfahren zur Überprüfung der Standsicherheit beliebiger Gewölbe und Widerlager und war außerordentlich erfolgreich. Noch 1913 sagte der große französische Ingenieur *Paul Séjourné* [73]: „Für ein sehr großes Gewölbe ist es sicherer und klarer, seine Stützlinien zu konstruieren und dann eine Gewölbeleitung und einen Gewölberücken zu ziehen, die diese bestmöglich einschließen“.

Um 1900 war es schwierig, die Elastizitätstheorie zu kritisieren; stand sie doch im Zentrum der baustatischen Theoriebildung. Gleichwohl nahmen einige Autoren gegenüber der Anwendung der Theorie des elastischen Bogens auf Gewölbe eine kritische Haltung ein. So zählte *Swain* in seinem 1927 veröffentlichten Buch [75] eine Reihe falscher Annahmen der elastizitätstheoretischen Analyse von Gewölben auf (s. [26, 76]); viele davon entsprachen den Auswirkungen der von *Winkler* festgestellten Störungen des „normalen Zustands“ von Gewölben. Das nimmt nicht Wunder, denn *Swain* zählte in den 1880er-Jahren zu den Schülern *Winklers* und trug zur Verbreitung der deutschen Statiklehre in den USA bei [20]. Tatsächlich erahnte *Swain* das Sicherheitstheorem, als er (ohne Beweis) konstatierte: „Ein Bogen ist stabil, wenn sich im Innern des Gewölbeprofils eine Stützlinie ziehen lässt.“

Die grafostatische Untersuchung war um 1900 zum Standardwerkzeug für die Überprüfung der Standsicherheit aller Arten von Gewölben geworden; die elastische Analyse gehörte bei größeren Gewölbebrücken zur statischen Berechnung. Das in Bild 12 dargestellte Verfahren, das einem der populärsten deutschen Statikbücher entnommen ist [77], bringt deutlich den Vorteil der grafostatischen Untersuchung zum Ausdruck. Bild 12a zeigt eine Brückenkonstruktion, deren Standsicherheit geprüft werden soll. Das Tragssystem ist in verschiedene Bereiche unterteilt. In Bild 12c wird die Standsicherheit der Sekundärgewölbe untersucht und ihr Gewölbeschub bestimmt. Anschließend wird das Gleichgewicht des Primärgewölbes untersucht (Bild 12b); es ist ersichtlich, dass die Stützlinie innerhalb des mittleren Drittels des Gewölbeprofils liegt.

Eine exakte elastische Analyse eines derart komplexen Tragwerks war zur damaligen Zeit unmöglich. Dennoch galt die Berechnung nach der Elastizitätstheorie als der „richtige“ Ansatz, und die Ingenieure führten komplizierte Berechnungen durch, die sie zu rationalisieren suchten wie

z.B. Mörsch 1906 [78], was er noch 1947 in seinem monumentalen Standardwerk darstellte [79]. Das von Mörsch 1906 veröffentlichte Verfahren zur rationalen Berechnung des dreifach statisch unbestimmten elastischen Bogens [78] wurde bis 1952 in 31 Ausgaben des einflussrei-

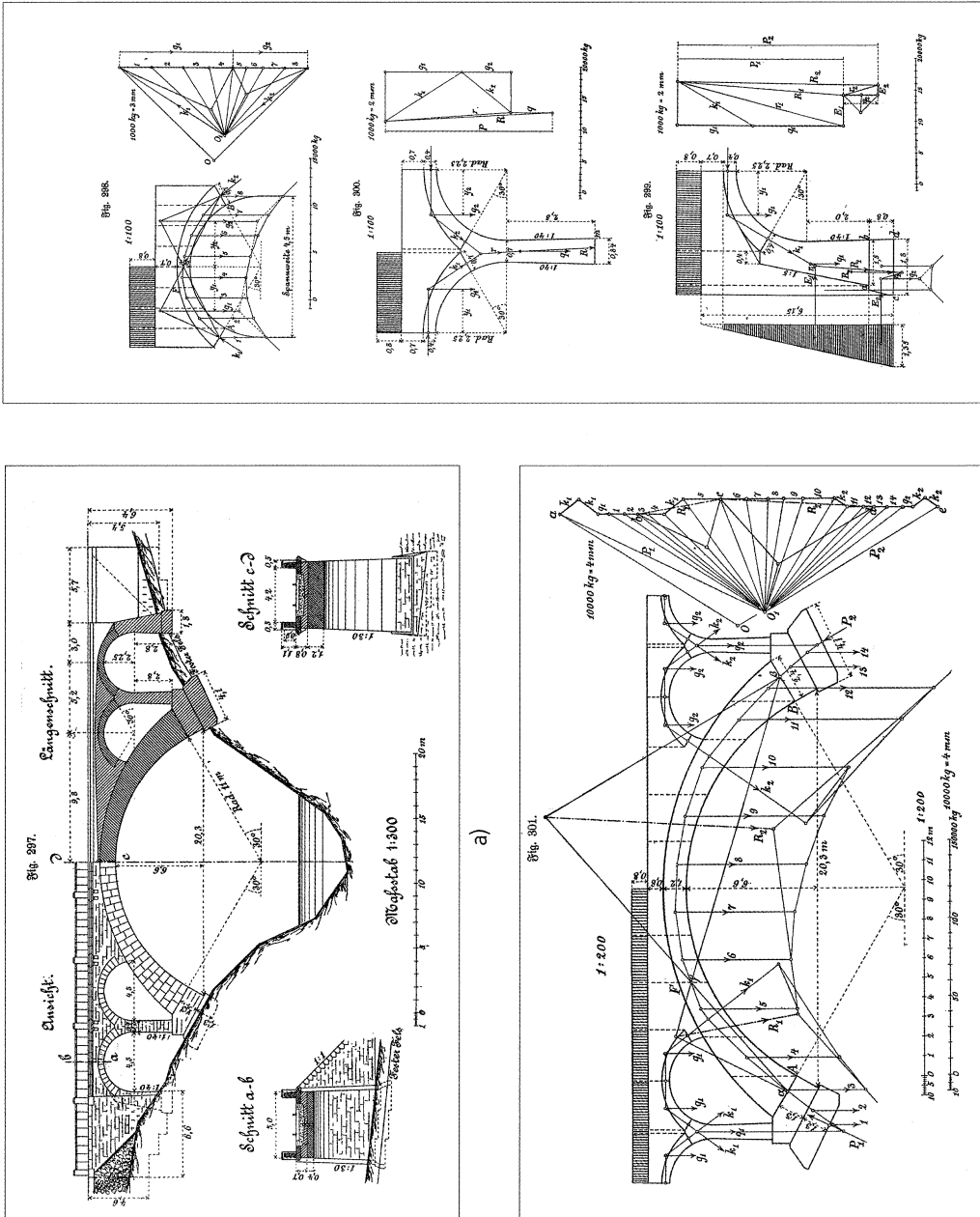


Bild 12. Grafostatische Untersuchung einer gemauerten Brücke um 1900 [77]

chen Jahrbuchs „Beton-Kalender“ veröffentlicht; ein Reprint des 1952 publizierten Beitrags über gewölbte Brücken erschien im Beton-Kalender des Jahres 2000 [80]. Mit dem Aufkommen von Computern in den 1960er-Jahren und der Verbreitung und Verbilligung von FE-Programmpaketen Ende der 1980er-Jahre wurde die elastische Analyse von Gewölbebrücken zur Routine; die erste Studie hierzu ist wahrscheinlich die von *Towler* im Jahre 1981 [81]. Die von *Winkler* festgestellten Abweichungen vom normalen Zustand des Gewölbes waren damit nicht aus der Welt geschafft – ihre Nichtberücksichtigung bei der baustatischen Modellbildung kann zu erheblichen Abweichungen zwischen Rechnung und Wirklichkeit führen. Wie in Abschnitt 3 dieses Beitrags noch gezeigt wird, bietet die Traglasttheorie eine adäquate Modellbildung von Gewölben. Einen Überblick und eine Besprechung der bis heute erschienenen Literatur über die Berechnung von Gewölbebrücken findet sich bei *Proske, Lieberwirth* und *van Gelde* 2006 [82].

## 2 Geschichte der Theorie räumlicher Gewölbe

Während in Abschnitt 1 die Entwicklungsgeschichte der Theorie ebener Gewölbe bis 1900 skizziert wurde, steht in Abschnitt 2 die Geschichte der räumlichen Tragwerke des Gewölbebaus wie Kuppeln und Kreuzgewölbe im Mittelpunkt. Des Weiteren werden ganzheitliche grafostatische Untersuchungen von Tragsystemen gotischer Kirchen exemplarisch vorgestellt.

### 2.1 Die ersten Kuppeltheorien

Im Gegensatz zur ebenen Gewölbe-theorie, deren Geschichte recht gut bekannt ist, ist die Entwicklungsgeschichte der Theorie räumlicher Gewölbe nur in groben Zügen bekannt: Ein kurzer Abriss findet sich bei *Trautz* 1998 [83] und *Huerta* 2004 [11]; *Trautz* untersuchte 2001 die Suche nach der Form statisch idealer Kuppeln bei *Hooke* und *Wren*, bei *Poleni*, bei *Soufflot* und *Rondelet* sowie bei *Antonelli* [84].

Der erste baustatisch begründete Entwurf für ein reales Gebäude war der Vorschlag, den *Hooke* in Zusammenarbeit mit *Wren* für die Kuppel der St.-Pauls-Kathedrale in London unterbreitete. *Heyman* [85] zeigte, dass *Hooke* die kubische Parabel für die beste Kuppelform hielt, und entdeckte tatsächlich, dass genau diese Kurve in

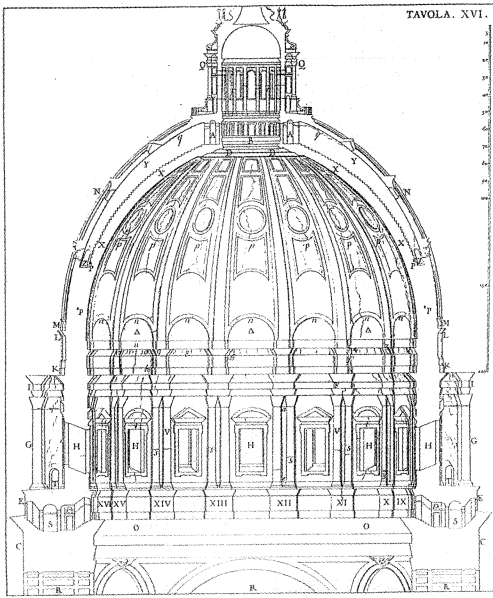
einem der Vorentwürfe für die Kuppel auftauchte. Die erste Abhandlung über die Konstruktion von Kuppeln wurde 1734 von *Bouguer* [86] verfasst. *Bouguer* untersuchte die möglichen Formen für stabile Kuppeln unter Vernachlässigung der Reibung, d. h. mit stets in der Mittelfläche der Kuppel wirkenden Druckkräften in Meridianrichtung, aber er berücksichtigte auch die Ringkräfte [87].

Die Arbeit mit dem vielleicht größten Einfluss auf die Entwicklung der Kuppeltheorie ist die Abhandlung von *Frézier* aus dem Jahre 1737 [88]. In einem Kapitel untersuchte *Frézier* „zusammengesetzte“, d. h. räumliche Gewölbe und bemerkte richtig, dass dieses Problem erstmals allgemein behandelt wird. Er benutzte dazu eine Technik, die heute als die „Streifenmethode“ bekannt ist [89]: *Frézier* stellte sich das räumliche Gewölbe als aus einer Reihe von Gewölbeelementen zusammengesetzt vor. Dies erlaubte ihm, den Kuppelschub mit dem von ihm als bekannt betrachteten Schub von Tonnengewölben desselben Profils zu vergleichen. Durch die Zusammenführung des reibungsfreien Ansatzes von *Bouguer* mit *Fréziers* Streifenmethode war der Weg für die rein mathematische Erforschung des Tragverhaltens von Kuppeln frei. Die Arbeiten von *Bossut* 1776 [90], *Salimbeni* 1787 [91] und *Bérard* 1810 [92] lassen sich innerhalb dieses Ansatzes einordnen. Sie kamen jedoch nie beim Entwurf realer Kuppeln zum Einsatz.

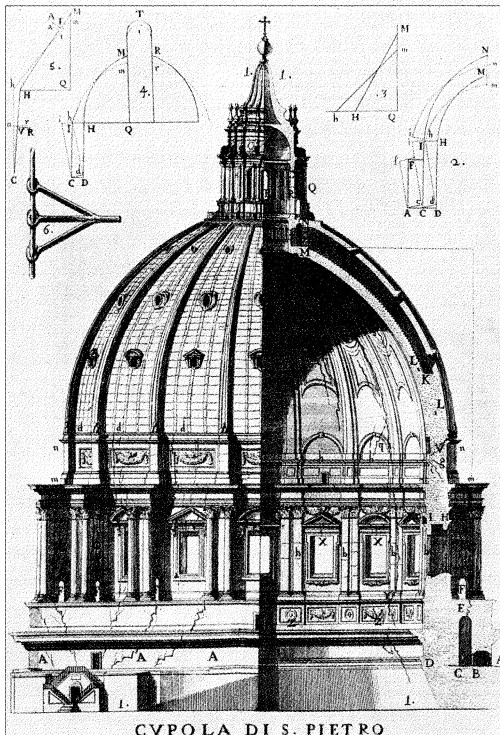
### 2.2 Kuppeltheorien in der Praxis bis in das frühe 19. Jahrhundert

Die ersten Standsicherheitsuntersuchungen an einer realen Kuppel wurden in den 1740er-Jahren durchgeführt, als Papst Benedikt XIV. Gutachten in Auftrag gab, die die in der Kuppel des Petersdoms in Rom beobachteten Risse erklären sollten (Bild 13 a). Das erste Gutachten wurde 1742 von den drei Mathematikern *Jacquier*, *Le Seur* und *Bošković* verfasst [93] (Bild 13 b). Die drei Mathematiker untersuchten die Risse und Neigungen von Kuppel und Tambour mit großer Sorgfalt und schlossen, dass die Risse in der Kuppel Folge eines leichten Nachgebens des Tambours nach außen waren. Der Bewegungsmechanismus findet sich in Bild 13 b, oben rechts. Die drei Mathematiker benutzten diesen Mechanismus, um mithilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit den Horizontalschub der Kuppel zu bestimmen [94–96].

Das zweite wichtige Gutachten schrieb *Poleni* im Jahre 1743 und veröffentlichte es in seinem 1748



a)

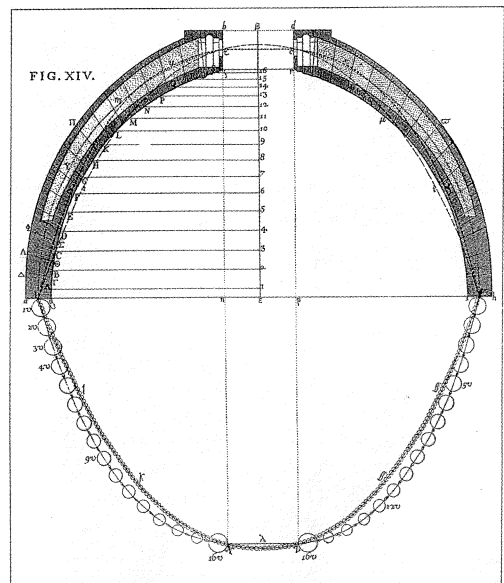


b)

erschienenen Buch [97]. *Poleni* folgte dem Ansatz von *Hooke* und *Gregory*: Ausgehend von den durch die drei Mathematiker berechneten Gewichten stellte er sich die Kuppel in vierzig „Orangenscheiben“ und die einzelnen Scheiben in jeweils sechzehn Keilsteine unterteilt vor. Daraufhin konstruierte er eine Kette aus Kugeln, deren Gewichte zu den Gewichten der „Keilsteine“ proportional waren, kehrte die Kette um und vergewisserte sich, ob die so entstandene Stütze im Gewölbeprofil verlief (Bild 13 c). *Poleni* schlussfolgerte, dass die Kuppel sicher war. Gleichwohl empfahl er fünf zusätzliche Zugringe, die unter der Projektleitung von *Vanvitelli* eingebaut wurden.

*Bošković*, einer der drei Mathematiker, schrieb noch zwei weitere Gutachten: das erste über die Sicherheit der großen ovalen Kuppel der Kaiserlichen Bibliothek in Wien und das zweite über die Sicherheit der neuen Turmspitze, die auf die Vierungskuppel der Mailänder Kathedrale gesetzt werden sollte [98, 99].

Anlässlich des Streits über die Machbarkeit von *Soufflotts* Entwurf für die neue Kuppel der Abteikirche auf dem Montagne Sainte-Geneviève in Paris (seit der französischen Revolution von 1789 als „Pantheon“ genutzt) publizierte der fran-



c)

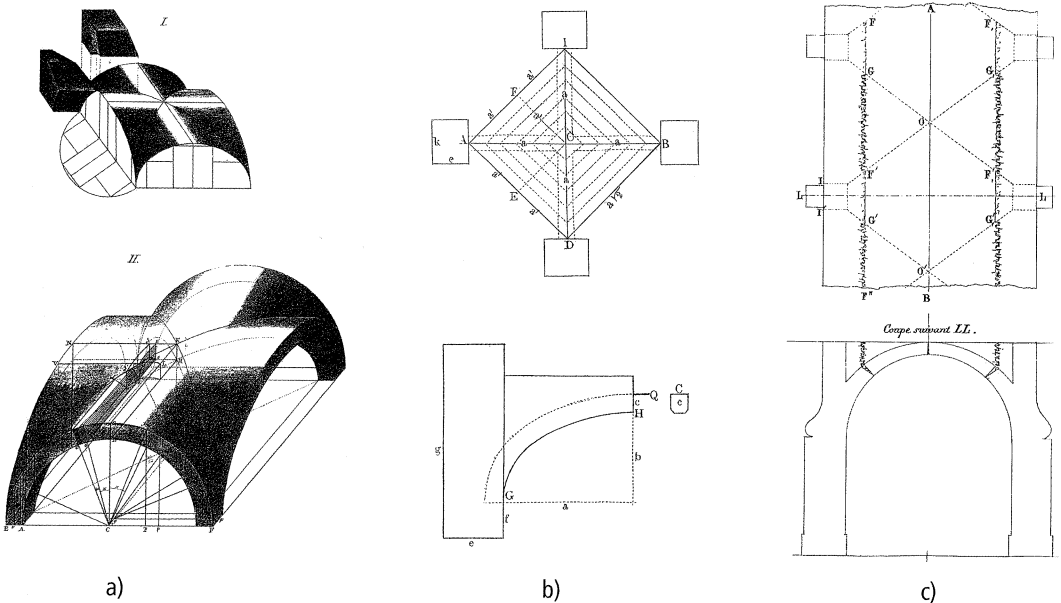
**Bild 13.** Die Kuppel des Petersdoms: a) Schäden an der Leibung um 1740 [97]; b) Analyse der drei Mathematiker mithilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit, 1742 [93]; c) Analyse von *Poleni* mithilfe der Kettenlinie für das Eigengewicht, 1743 [97]

zösischer Ingenieur *Gauthier* im Jahre 1798 eine Abhandlung über die Berechnung von Kuppeln, in der er die Streifenmethode richtig anwandte und einen Versagensmechanismus durch Gelenkbildung betrachtete [100]. Nach dem Tod von *Soufflot* 1780 wurde der Bau von *Sainte-Geneviève* unter der Leitung *Rondelets* weitergeführt. *Rondelets* nach der umgekehrten Kettenlinie geformte Zwischenkuppel mit großen Lichtöffnungen und der schweren aufgesetzten Laterne wies kurz nach Fertigstellung Risse auf. „Ohne den umlaufenden Gang, der sich etwa auf einem Drittel der Höhe befindet und ein Ausweichen der Kuppelwandung behindert“, schrieb *Trautz*, eine materiell-nichtlineare FE-Simulation auswertend, „wäre die Zwischenkuppel sogar eingestürzt“ ([84], S. 108). Gleichwohl propagierte *Rondelet* immer wieder seine empirischen Regeln zur Formgebung von Kuppeln. Sie flossen mit seinen Erfahrungen aus dem 1790 fertiggestellten Bauwerk ein in sein siebenbändiges Monumentalwerk „*Traité théorique et pratique de l'art de bâtir*“ [101], das er von 1802 bis 1817 im Selbstverlag veröffentlichte: „Auf diese Weise wurden auch seine zum Teil fehlerhaften Einsichten bezüglich der statischen Idealform von Kuppeln an spätere Generationen weitergegeben“ ([84], S. 108). *Lamé* und *Clapeyron* untersuchten 1823 [102] im Zusammenhang mit vorbereitenden Entwürfen

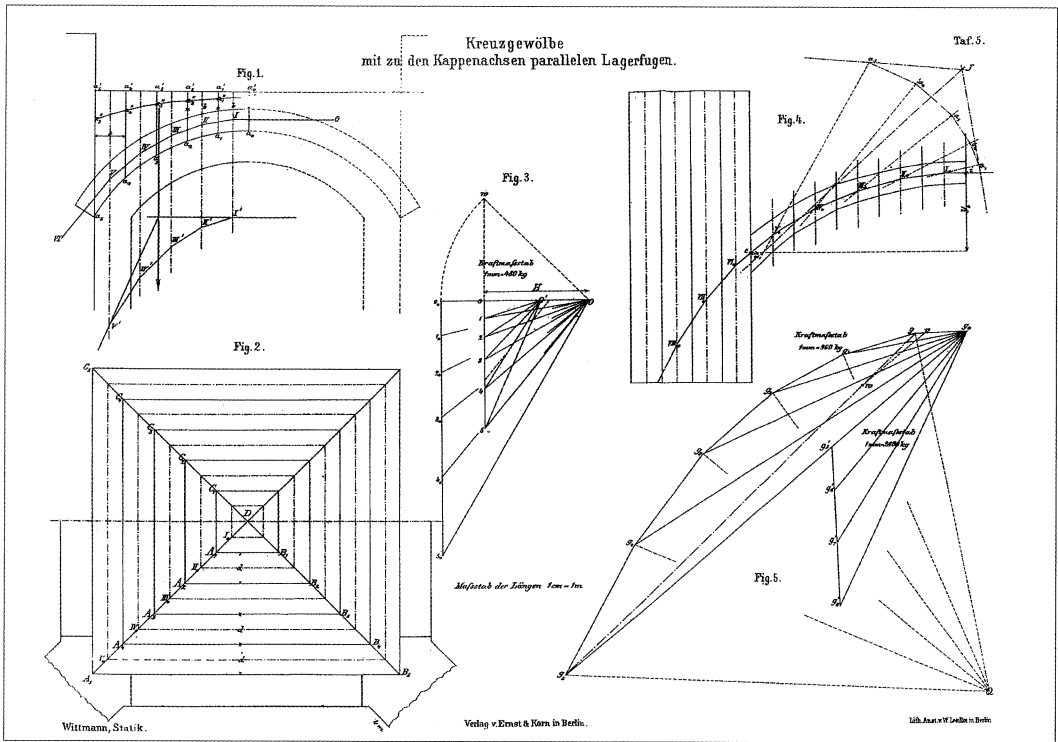
für die St.-Isaak-Kathedrale in St. Petersburg die Standsicherheit einer halbkugelförmigen Kuppel mit einem Verhältnis Dicke : Spannweite = 1 : 32. Sie stellten sich die Kuppel in Orangenscheiben unterteilt vor und berechneten korrekt die Bruchfuge und den zugehörigen Gewölbeschub. Allerdings nahmen sie die Lage der oberen Bruchfuge am Schlussstein an – tatsächlich liegt sie in einem gewissen Abstand zu diesem [103].

### 2.3 Analyse von Kreuzgewölben

Ebenfalls im Jahre 1823 veröffentlichte *Dietlein* eine Abhandlung über Kreuzgewölbe [104], in der er der alten Theorie von *Eytelwein* [105] folgte und sich in der Hauptsache mit Schwerpunkt berechnungen beschäftigte, wozu er das Gewölbe in Streifen unterteilte (Bild 14 a). *Navier* behandelte in seinen 1826 veröffentlichten „*Leçons*“ ebenfalls auf allgemeine Weise das Problem der Berechnung von Kreuz- und Walmgewölben. Außerdem untersuchte er den Fall von Kuppeln und richtete seine Aufmerksamkeit auf die Eisenringe und mögliche Berechnungsverfahren für diese. Auch *Persy* [106], *Kobell* [107] und *Scheffler* [61] (Bild 14 b) gaben Berechnungsverfahren für Kuppeln, Kreuz- und Walmgewölbe an. Alle angeführten Beiträge gingen das Problem



**Bild 14.** Zur Statik von Kreuzgewölben: a) *Dietleins* Studien zum Gleichgewicht [104], b) *Schefflers* Analyse mithilfe der Streifenmethode [61], c) *Michons* globale Analyse auf Basis des Risszustands eines Gewölbes [108]

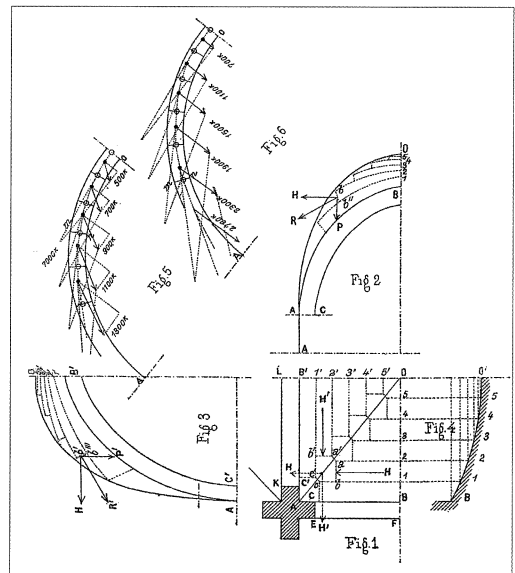


a)

auf mathematischem Wege an, und die vorgeschlagenen Verfahren fanden keine Anwendung in der Ingenieurpraxis. Im Gegensatz zu diesem allgemeinen Trend machte *Michon* 1857 einen sehr interessanten Vorschlag für eine schnelle Berechnung des Gewölbeschubs, wobei er das globale Gleichgewicht und die tatsächlichen Risse im Gewölbe betrachtete [108] (Bild 14 c).

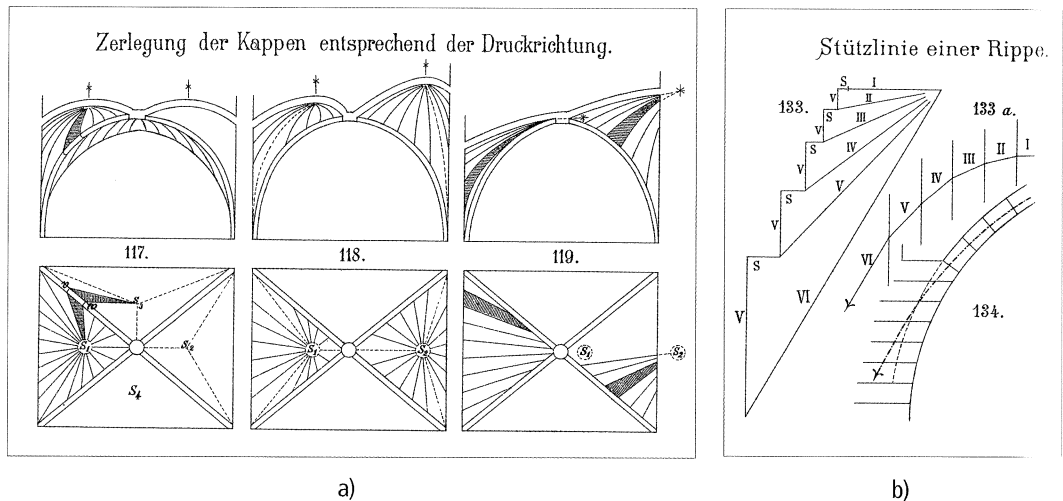
## 2.4 Grafostatische Untersuchung räumlicher Gewölbe

In den 1870er-Jahren ermöglichten grafostatische Verfahren für Gewölbe in Kombination mit der Streifenmethode die Tragstrukturanalyse beliebiger räumlicher Gewölbe. 1879 veröffentlichte *Wittmann* [109] vermutlich die erste korrekte grafostatische Untersuchung räumlicher Gewölbe wie Kreuzgewölbe und Kuppel (Bild 15 a). *Planat* ging 1887 dieses Thema an [110], benutzte dabei aber nicht das Kräfte- und Seilpolygon, sondern zog es vor, die Kräfte auf derselben Zeichnung unmittelbar zu zerlegen (Bild 15 b). Die verschiedenen Verfahren zur Tragstrukturanalyse von Kreuzgewölben wurden ausführlich von *Barthel* erörtert [111].



b)

**Bild 15.** Grafostatische Untersuchung eines Kreuzgewölbes, a) mit Kräfte- und Seilpolygon nach *Wittmann* [109] und b) mit unmittelbarer Kräftezerlegung in der Zeichnung nach *Planat* [110]



**Bild 16.** Mohrmanns Erläuterung der Streifenmethode: a) mögliche Einteilung der Gewölbekappen in Streifen, b) Stützlinie in der Rippe eines Kreuzgewölbes [112]

Die vollständigste Darstellung der baustatischen Untersuchung gewölbter Steinkonstruktionen gab Karl Mohrmann in der dritten Auflage von Ungewitters „Lehrbuch der gotischen Konstruktionen“ im Jahre 1890 [112]; dort beschäftigte sich Mohrmann insbesondere mit Kreuzgewölben neogotischer Kirchen. Die ersten beiden Kapitel über Gewölbe und Strebepfeiler, die er vollständig neu schrieb, enthalten die beste Darstellung des Baus und der baustatischen Analyse gotischer Mauerwerksbauten. Mohrmann beschreibt zunächst die Anwendung der Streifenmethode zur Ermittlung der resultierenden Druckkräfte eines gotischen Gewölbes: Die Gewölbekappen werden in Streifen zerlegt, wobei die so entstandenen Streifen von der Form des Gewölbes abhängen (Bild 16 a). Die aus den Gewölbestreifen resultierenden Druckkräfte wirken dann als Lasten auf die Kreuzrippen des Gewölbes ein (Bild 16 b), werden von Letzteren als Auflagerdruckkraft an die Strebepfeiler abgegeben, und von diesen – zusammen mit anderen Einwirkungen wie z. B. dem Eigengewicht der Strebepfeiler – in das Fundament abgetragen.

Das Verfahren ist zwar klar, kann aber langwierige Berechnungen und grafostatische Operationen mit sich bringen, insbesondere wenn die Unterteilung viele unterschiedlich geformte Gewölbestreifen ergibt. Deshalb schlug Mohrmann ein rationelleres Verfahren vor (Bild 17): Er berechnete aus dem globalen Gleichgewicht am Halbgewölbe des einzelnen Gewölbefeldes für unterschiedliche Materialien, Lasten und Pfeil-

verhältnisse den Horizontalschub (pro m<sup>2</sup> Grundriss des lastenden Gewölbestücks des Kreuzgewölbes) und fasste diesen mit anderen interessanten Parametern in einer Tabelle zusammen (Bild 17). Die Tabelle lässt sich noch heute für die statische Nachrechnung von Kreuzgewölben vorteilhaft einsetzen. So nahm Heyman eine vereinfachte Version in sein 1995 veröffentlichtes Buch „The Stone Skeleton. Structural Engineering of Masonry Architecture“ [89] auf.

Die Tragstrukturanalyse von Kuppeln gestaltete sich aufgrund der Rotationssymmetrie wesentlich einfacher. Die Kuppel wird in ihren Meridianen gleichmäßig in „Orangenscheiben“ derart unterteilt, dass je zwei gegenüberliegende „Orangenscheiben“ ein Gewölbe mit veränderlicher Breite bilden. Mitunter wurden auch die Ringkräfte im oberen Kuppelteil berücksichtigt. Auf diese Weise entwickelte Wittmann ein Verfahren zur Konstruktion der Stützlinie [109]; ihm folgten andere deutsche Autoren wie z. B. Körner [113] und Lauenstein [77]. Eddy publizierte 1878 ein grafisches Verfahren zur Bestimmung der Ringkräfte (sowohl Druck- als auch Zugkräfte) für den Membranspannungszustand von Kuppeln [114], [115], das Föppl 1881 auf gemauerte Kuppeln anwandte [116]. Das Verfahren erlaubte die Berechnung von rotationssymmetrischen Kuppeln beliebiger Form. Diesen Ansatz verbreitete Dunn in der nordamerikanischen Fachwelt [117]; noch Rafael Guastavino Jr. machte im ersten Drittel des 20. Jahrhunderts ausführlich von ihm Gebrauch, um dünne Ziegelskuppeln zu planen [118].



Tabelle I.  
Die Gewichte und Horizontalschübe der Gewölbe (s. Fig. 365).

Bezeichnung des Gewölbes	Gewicht des Gewölbes pro qm Fläche	Hebelarm resultierenden Gewichtes a	Hebelarm Horizontal- schübe h	Höhe des Gewölbes über Gewölbbasis Z	Horizontalschub für 1 qm Flächeneinheit Gewölbbasis H <sub>0</sub>	Beispiel I. Gewölbe von 4 m Gewölbbasis V		Beispiel II. Gewölbe von 8 m Gewölbbasis V	
						V	H	V	H
<b>I. Pfeilverhältnis 1:8.</b>									
a. Kappen 1/8 Stein aus porösen Ziegeln . . . . .	300	0,22—0,23 s	0,90 f**	1/8 bis 1/6 f	380—400	1600	3200	6400	11500
b. 1/8 Stein feste Ziegel oder 1/8 Stein porös . . . . .	270	rd 2/9 s	oder	1/8 bis 1/6 f	300—350	2160	4400	8600	16000
c. 1/8 Stein feste Ziegel oder 1/8 Stein porös . . . . .	370	rd 2/9 s	oder	1/8 bis 1/6 f	700—750	2960	6000	11800	22400
d. 1 Stein feste Ziegel oder 20 cm dick Sandstein . . . . .	540	rd 2/9 s	oder	1/8 bis 1/6 f	900—1000	4000	8000	16000	30400
e. 30 cm dick Bruchstein . . . . .	850	0,30 s = 1/6 s	oder	1/8 bis 1/6 f	1000—1100	4800	13600	27200	51000
f. Überfülltes Ziegelgew., mit Fusb, 32 cm im Scheitel . . . . .	—	—	—	—	—	5800	11000	28000	46000
<b>II. Pfeilverhältnis 1:3.</b>									
a. Kappen 1/8 Stein aus porösen Ziegeln . . . . .	280	0,19—0,21 s	0,85—0,75 f	1/6 bis 1/4 f	160—180	1840	1440	7400	5100
b. 1/8 Stein feste Ziegel oder 1/8 Stein porös . . . . .	310	rd 1/6 s	oder	1/6 bis 1/4 f	220—240	2480	1980	9900	7000
c. 1/8 Stein feste Ziegel oder 1 Stein porös . . . . .	420	rd 1/6 s	oder	1/6 bis 1/4 f	300—330	3360	2640	13400	9000
d. 1 Stein feste Ziegel oder 20 cm dick Sandstein . . . . .	570	rd 1/6 s	oder	1/6 bis 1/4 f	420—450	4560	3660	18200	12400
e. 30 cm dick Bruchstein . . . . .	1000	0,17 s = 1/6 s	oder	1/6 bis 1/4 f	710—750	8000	6000	32000	22700
f. Überfülltes Ziegelgew., mit Fusb, 32 cm im Scheitel . . . . .	—	—	—	—	—	7300	5200	37500	28000
<b>III. Pfeilverhältnis 1:2.</b>									
a. Kappen 1/8 Stein aus porösen Ziegeln . . . . .	260	0,17—0,20 s	0,80—0,70 f	1/6 bis 1/4 f	110—120	2080	960	8300	3500
b. 1/8 Stein feste Ziegel oder 1/8 Stein porös . . . . .	350	rd 1/6 s	oder	1/6 bis 1/4 f	140—160	2800	1280	11200	4500
c. 1/8 Stein feste Ziegel oder 1 Stein porös . . . . .	480	rd 1/6 s	oder	1/6 bis 1/4 f	190—220	3840	1760	15400	6100
d. 1 Stein feste Ziegel oder 20 cm dick Sandstein . . . . .	700	0,16 s	oder	1/6 bis 1/4 f	280—320	5600	2560	22400	9000
e. 30 cm dick Bruchstein . . . . .	1200	—	—	—	480—550	9600	4400	38500	13500
f. Überfülltes Ziegelgew., mit Fusb, 32 cm im Scheitel . . . . .	—	—	—	—	—	8000	3800	41600	17600
<b>IV. Pfeilverhältnis 2:3.</b>									
a. Kappen 1/8 Stein aus porösen Ziegeln . . . . .	290	0,17—0,20 s	0,80—0,72 f	1/6 bis 1/4 f	90—100	2320	800	9300	2900
b. 1/8 Stein feste Ziegel oder 1/8 Stein porös . . . . .	380	rd 1/6 s	oder	1/6 bis 1/4 f	110—130	3040	1040	12200	3500
c. 1/8 Stein feste Ziegel oder 1 Stein porös . . . . .	530	rd 1/6 s	oder	1/6 bis 1/4 f	160—180	4240	1440	17000	5100
d. 1 Stein feste Ziegel oder 20 cm dick Sandstein . . . . .	750	0,16 s	oder	1/6 bis 1/4 f	220—250	6000	2000	24000	7000
e. 30 cm dick Bruchstein . . . . .	1300	—	—	—	400—450	10400	3440	41500	12800
f. Überfülltes Ziegelgew., mit Fusb, 32 cm im Scheitel . . . . .	—	—	—	—	—	10500	3500	57900	17400
<b>V. Pfeilverhältnis 5:6 bis 1.</b>									
a. Kappen 1/8 Stein aus porösen Ziegeln . . . . .	340	0,16—0,19 s	0,80—0,75 f	1/6 bis 1/4 f	80—90	2720	720	10900	2600
b. 1/8 Stein feste Ziegel oder 1/8 Stein porös . . . . .	450	rd 1/6 s	oder	1/6 bis 1/4 f	100—110	3600	880	14400	3200
c. 1/8 Stein feste Ziegel oder 1 Stein porös . . . . .	620	0,15 s	oder	1/6 bis 1/4 f	130—160	5200	1280	20800	4800
d. 1 Stein feste Ziegel oder 20 cm dick Sandstein . . . . .	900	—	—	—	210—250	7200	1840	28800	6700
e. 30 cm dick Bruchstein . . . . .	1500	—	—	—	350—510	12000	2960	48000	11200
f. Überfülltes Ziegelgew., mit Fusb, 32 cm im Scheitel . . . . .	—	—	—	—	—	13000	5000	77800	17500

\* s = Spannwerte, \*\* f = Pfeilhöhe.

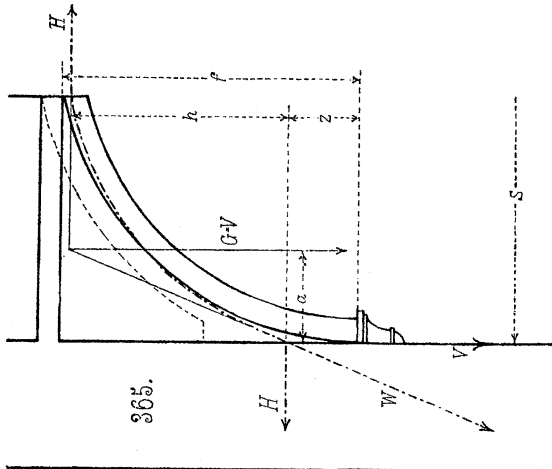
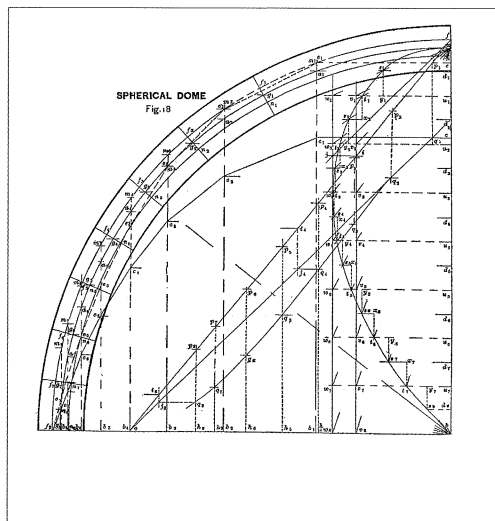


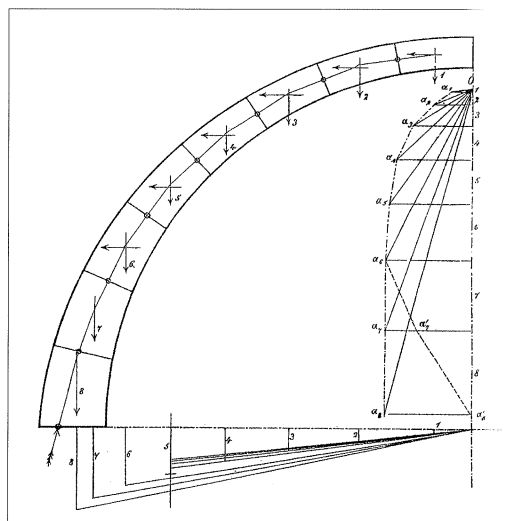
Bild 17. Tabelle von Mohrmann zur schnellen Berechnung des Horizontalschubs von Kreuzgewölben [112]

Normalerweise wurden die Ringkräfte vernachlässigt, sodass die Theorie ebener Gewölbe angewandt werden konnten (s. z. B. [119]). 1928 gibt *Dischinger* eine allgemeine Methode zur Bestimmung des Membranspannungszustandes beliebiger dünner Stahlbetonschalen an [120], ohne die einschlägigen Arbeiten von *Eddy* und *Föppl* zu zitieren. Damit ist nicht *Flügges* 1934 publiziertes Buch über die

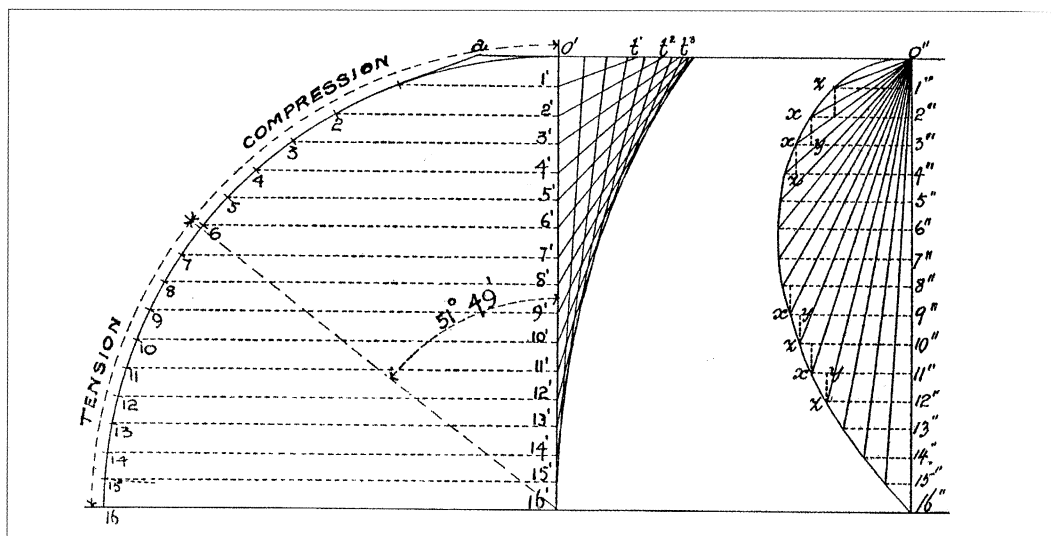
„Statik und Dynamik der Schalen“ [121] die erste Monografie über die Schalentheorie, sondern die erwähnte Arbeit *Dischingers*. Mit den Schalenträgwerken der Fa. Dischinger & Widmann von *Dischinger*, *Rüsch* und *Finsterwalder* verlieh der Stahlbetonbau der Entwicklung einer baustatischen Schalentheorie in der Inventionsphase der Baustatik (1925–1950) die entscheidenden Impulse.



a)



b)



c)

**Bild 18.** a) Grafisches Verfahren von *Eddy* zur Ermittlung der Meridian- und Ringkräfte in einer Kuppel [114], b) *Föppls* Analyse einer gemauerten Kuppel unter Annahme eines Membrandruckspannungszustands im oberen Teil [116], c) grafostatische Untersuchung des Membranspannungszustandes einer dünnen Schale nach *Dunn* [117]

## 2.5 Grafostatische Tragstrukturanalyse und Tragstruktursynthese gotischer Kirchenbauwerke

Wie in Abschnitt 2.2 gezeigt wurde, erfolgten die ersten quantitativen Tragstrukturanalysen Mitte des 18. Jahrhunderts in Form von Gutachten. Sie dokumentieren ein hohes Maß an Verständnis für das Tragverhalten gewölbter Steinkonstruktionen und setzten äußerst nützliche und raffinierte analytische Methoden ein. Gleichwohl hatten sie auf die Entwurfs- und Konstruktionspraxis des Gewölbebaus so gut wie keinen Einfluss. In der das letzte Viertel des 19. Jahrhunderts umfassenden Phase der klassischen Baustatik setzt sich nicht nur die Theorie des ebenen elastischen Bogens gegenüber den alten Gewölbetaeorien durch, sondern auch die grafische Statik in Gestalt der Grafostatik. Während die grafische Statik eines *Culmann* und *Cremona* noch nach den mathematischen Grundlagen fragt, ist die Grafostatik allein der operativen Seite des statischen Rechnens und Zeichnens verpflichtet. So gelingt es mit der Grafostatik, den Standsicherheitsnachweis gotischer Kirchenbauwerke noch bis ins letzte Viertel des 20. Jahrhunderts auf ganzheitliche Weise zu führen.

### 2.5.1 Paul Planat

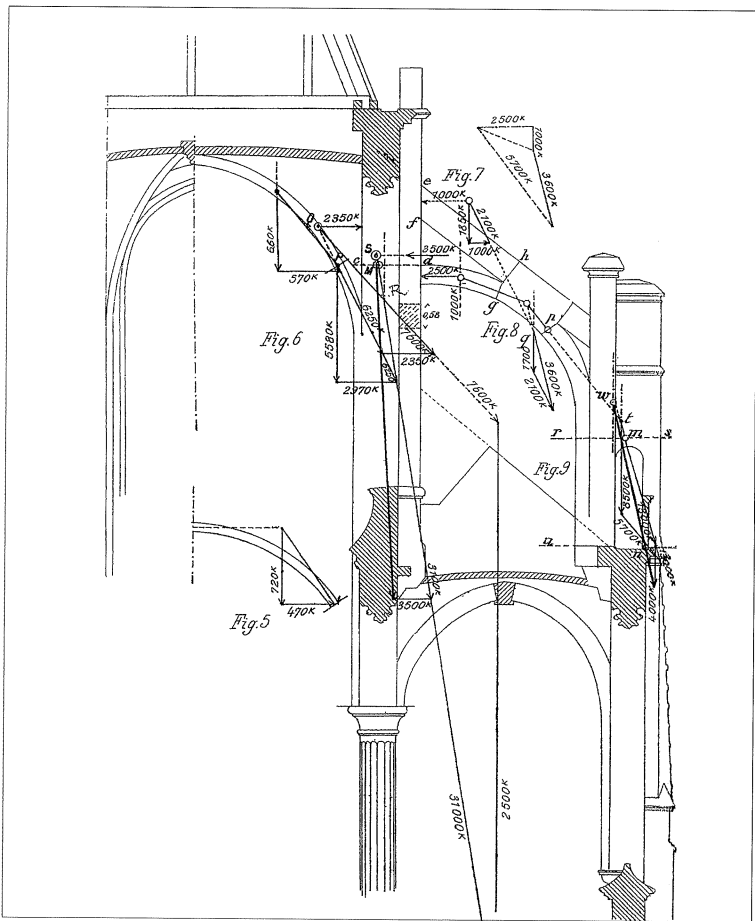
1877 veröffentlichte *Planat* mit seiner Aufsatzserie über die Statik gotischer Kirchen vermutlich die erste quantitative Untersuchung des gesamten Tragsystems eines Gebäudes [122]. Er berechnete den Horizontalschub der Elemente der Kreuzgewölbe mithilfe der Theorie von *La Hire* bzw. *Béldor* und legte die Position des Angriffspunkts des Horizontalschubs willkürlich fest. Zehn Jahre später führte er eine korrekte grafische Untersuchung durch und analysierte anschließend das gesamte Tragsystem gotischer Kirchen [110] (s. Bild 15b/oben). *Planat* unterteilte das Gebäude in einzelne Tragstrukturelemente wie Gewölbe, Strebebögen, Wände und Strebpfeiler etc. Nach der statischen Untersuchung dieser Tragstrukturelemente setzte er diese wieder zusammen und überprüfte, ob die Stützlinien im Mauerwerkprofil verlaufen. So verschmolz *Planat* die Tragstrukturanalyse mit der Tragstruktursynthese zu einer dialektischen Einheit. Auf dieser methodischen Basis entwickelte er in weiteren Veröffentlichungen detaillierte statische Nachweise ganzer Gebäude aus Mauerwerk [123, 124] (Bild 19).

### 2.5.2 Karl Mohrmann

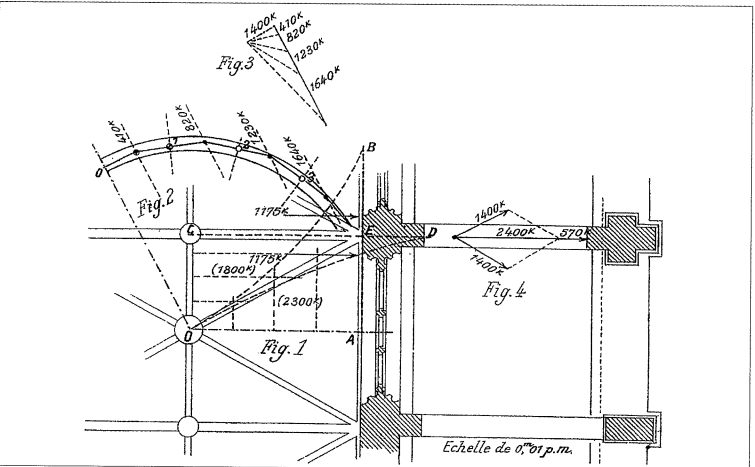
Die bereits zitierte Arbeit von *Mohrmann* [112] war präziser, ging auf viele konstruktive Details ein und stellte in der Tat eine umfassende Behandlung des Problems der Statik und Konstruktion eines kompletten Gebäudes dar. Wie bei *Planat* finden sich auch in *Mohrmanns* Ergänzungen des „Lehrbuchs“ [112] von *Ungewitter* keine Bemerkungen über vorausgegangene statische Analysen gotischer Tragwerke, sodass es schwierig ist, die historisch-logische Entwicklung des von *Mohrmann* perfektionierten Verfahrens zu rekonstruieren. Aus Platzgründen kann hier das hohe Maß an Einsicht in das Tragverhalten und die Detailgenauigkeit von *Mohrmanns* statischer Analyse (Bild 20) nicht näher dargelegt werden. Bis heute stellt sie die beste Anleitung zur Untersuchung und zum Verständnis gotischer Tragsysteme dar. Offensichtlich bereitete *Mohrmann* jahrelang umfangreiches Material für die dritte Auflage des „Lehrbuchs“ [112] von *Ungewitter* auf. So erkannten schon um 1880 einige Architekten und Ingenieure das Potenzial der Grafostatik zur Untersuchung gotischer Tragsysteme – hier sind jedoch weitere Forschungen aus Sicht der Bautechnikgeschichte notwendig.

### 2.5.3 Die Entwicklung im 20. Jahrhundert

Die grafostatische Untersuchung von Bauwerken verbreitete sich schnell und avancierte um 1900 zum integralen Bestandteil des Wissenskanons der Bauingenieure und Architekten in Europa; um diese Zeit endete auch die Disziplinbildungsperiode der Baustatik (1825–1900) mit ihrer Vollendung in Gestalt der klassischen Baustatik, die mit den Namen *Winkler*, *Mohr*, *Maxwell*, *Culmann*, *Betti*, *Cremona*, *Castigliano*, *Land*, *Müller-Breslau* und *Kirpichev* verbunden ist. In Frankreich erstellte *Benouville* im Jahre 1891 [125] eine vollständige statische Analyse eines typischen Gebäudeabschnitts der Kathedrale von Beauvais. Erwähnung verdient auch die 1901 von *Körner* veröffentlichte Arbeit [113], die statische Studien fast aller Gewölbeformen enthält. In Spanien konstruierte *Gaudí* seine gemauerten Gebäude mithilfe grafostatischer Methoden und Kettenlinienmodellen. Bekannte Beispiele aus der katalanischen Metropole Barcelona hierfür sind die Stützpfiler und die Kirche im Park Güell, die Kirche der Sagrada Família sowie das Dach der Casa Milá [126, 127]. Zur Formgebung von Gewölben entwickelt *Graefe* 1986 aus der Perspektive des historischen Längsschnitts einen vortrefflichen Überblick [128].



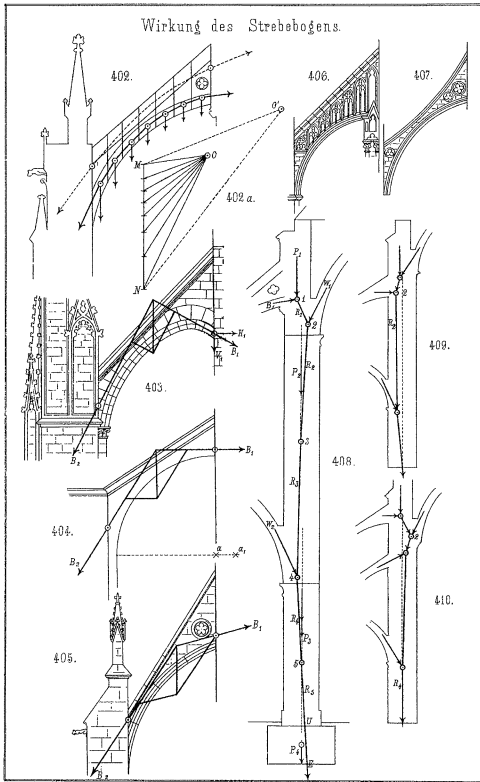
a)



b)

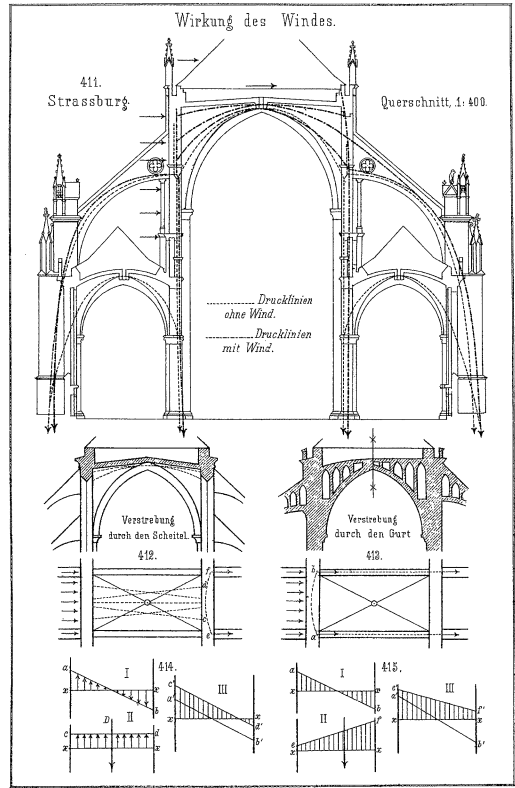
**Bild 19.** Grafostatische Untersuchung einer dreischiffigen Kirche nach Planat [123]: a) Statik des oberen Teils einschließlich der Gewölbe und des Strebewegs, b) Berechnung des Horizontalschubs des Hauptgewölbes

Tafel XLI.



a)

Tafel XLII.



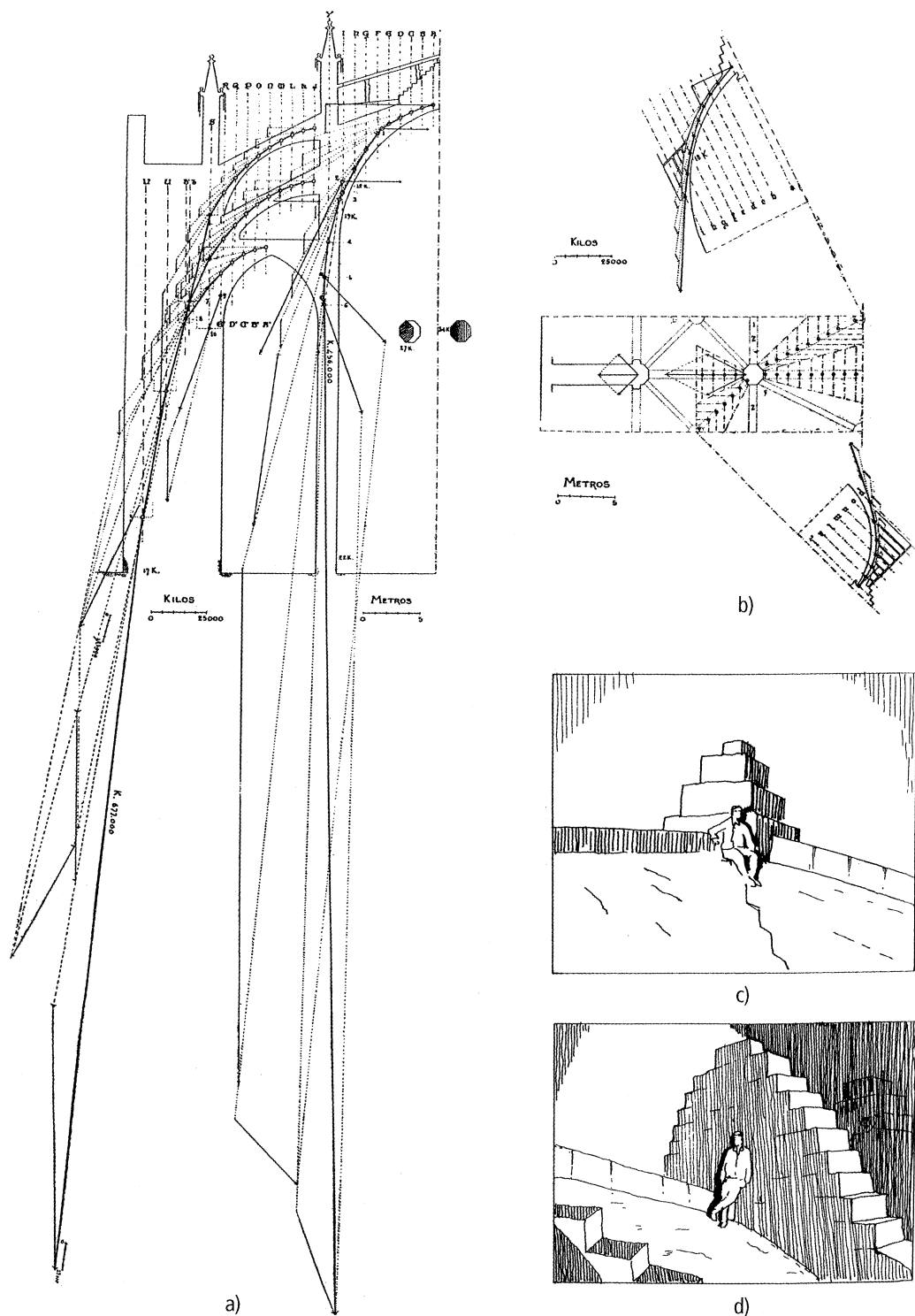
b)

**Bild 20.** Statistische Untersuchung gotischer Kirchen und Kathedralen nach *Mohrmann* [112]: a) Analyse der Strebebögen und der Standsicherheit der Strebepfeiler, b) Analyse des Straßburger Münsters

Ein Schüler *Gaudis*, *Rubiò i Bellver*, veröffentlichte 1912 eine Abhandlung über die Statik der Kathedrale von Palma de Mallorca [129]. Die Studie war mit großer Sorgfalt ausgeführt worden und enthielt detaillierte Tabellen mit den Abmessungen und Lasten aller Gebäudeteile. Daraufhin berechnete *Rubiò* nach dem oben erläuterten Verfahren die resultierende Schubkraft der Gewölbe und Strebebögen. Das Problem bestand nun darin, eine im Mauerwerkprofil liegende Stütznlinie zu finden. *Rubiòs* Aufgabe bestand also darin, einen möglichen Gleichgewichtszustand mit einer nahezu vertikalen, durch das Pfeilerprofil des Schiffs verlaufenden Resultierenden zu finden. Das hochgradig statisch unbestimmte System wird auf eine reine Gleichgewichtsaufgabe reduziert, indem die Stütznlinie im Schwerpunkt des Querschnitts des Bogen- bzw. Gewölbescheitels angenommen wird. Die Gewölbeschübe oszillieren innerhalb enger Gren-

zen. Insgesamt gibt es drei Strebebögen, wovon der dritte durch den Querbogen des Seitenschiffs gebildet wird, der eine Natursteinwand trägt und als horizontaler Strebebogen fungiert (Bild 21 a, b). *Rubiò* beklagte den Arbeitsaufwand, den er für eine zufriedenstellende Lösung der komplizierten Gleichgewichtsaufgabe erbringen musste. Letztendlich ist diese nur aufgrund des großen Gewichts der Pyramiden (Bild 21 c) und Wände (Bild 21 d) aus Natursteinmauerwerk möglich, mit denen die Gewölbe von oben belastet sind. Das große Gewicht auf den oberen Gewölben erzeugt einen großen Horizontalschub, der von gewaltigen Strebebögen auf das vielleicht größte Strebewerk der Gotik übertragen wird.

Die grafostatische Untersuchung blieb auch weiterhin das Standardverfahren, wenn es galt, neue Entwurfsvorschläge statisch zu überprüfen oder Schlussfolgerungen über die baukonstruktive Sicherheit bestehender Gebäude zu ziehen. Bei-



**Bild 21.** a) und b) Statistische Analyse der Kuppel von Palma de Mallorca nach Rubió [129], c) und d) Gewichte zum Ausgleich der schlanken Pfeiler des Hauptschiffs [11] (Nachzeichnung von Fotografien aus [129])

spielsweise stellte *Rüth* in den 1920er-Jahren [130] im Rahmen von Sicherungsarbeiten am Mainzer Dom derartige Analysen an, um die Gewölbeschübe, das Gleichgewicht der diversen untersuchten Tragstrukturelemente und schließlich die Beanspruchung des Fundaments zu berechnen. Im Jahre 1933 schrieb *Zorn* [131] eine Dissertation mit einer detaillierten statischen Untersuchung der St.-Martinskirche in Landshut. Während des II. Weltkriegs erlitten auch viele Kirchen in Deutschland erhebliche Schäden, die oftmals mit der vollständigen Zerstörung von Gebäudeteilen einhergingen. Die Untersuchung der Tragsicherheit solcher Bauwerke nach Kriegsende erfolgte mit den traditionellen grafostatischen Verfahren. Eine wichtige Rolle kommt in dieser Zeit *Klaus Pieper* zu, der fast fünfzig Jahre lang auf diesem Gebiet aktiv war. Die erste ganzheitliche statische Untersuchung führte er für die Lübecker Marienkirche durch [132]. *Pieper* ermittelte den Gewölbeschub aus dem globalen Gleichgewicht, indem er die Form der Last auf einer transversalen Ebene berechnete und nach dem minimalen Horizontalschub suchte, wozu er die Stützlinie tangential zur Querrippe verlaufen ließ. Dann ermittelte er den minimalen Horizontalschub für die Strebebögen und bestimmte das Gleichgewicht des gesamten Tragsystems (Bild 22). Eine Auswahl seines umfangreichen Erfahrungsschatzes über die Sicherung historischer Bauwerke trug *Pieper* in seinem 1983 veröffentlichten Buch zusammen [133]. *Pieper* verfolgte stets den Ansatz der einfachen Statik, d. h. Problemlösungen im Sinne der Gleichgewichtsaufgabe; deshalb modellierte er jene Stellen, bei denen Rissbildung aus Rotation des Querschnitts vorlag, mit Gelenken – dadurch lag nun ein statisch bestimmtes System vor, für das ein und nur ein Gleichgewichtszustand ermittelt werden musste. Im Wesentlichen handelt es sich jedoch um dasselbe Verfahren, das *Planat*, *Mohrmann* und *Rubió* einsetzten. Demselben grafostatischen Untersuchungsverfahren folgte *Grassnick* 1963 bei seiner detaillierten Analyse für die Wiederherstellung der gewölbten Steinkonstruktionen des Doms zu Xanten [134]; auch *Segger* ist mit seiner 1969 fertig gestellten Dissertation über die Statik gotischer Kathedralen dieser Tradition verpflichtet [135]. 2003 wies *Fleckner* die Standsicherheit der Kathedralen von Chartres, Amiens, Soissons, Beauvais, Bourges, Notre-Dame de Paris und des Kölner Doms mithilfe einfacher Gleichgewichtsbetrachtungen nach [136]. Mit seinen vergleichenden statischen Untersuchungen der großen

nordfranzösischen Kathedralen möchte *Fleckner* aufzeigen, dass das charakteristische Strebewerk trotz sehr unterschiedlicher Architektur sinnvoll und zielgerichtet konstruiert worden ist. Nach *Fleckner* hätten die Kenntnisse der Mathematik und Mechanik an den Kathedralschulen in Frankreich um 1200 ausgereicht, um Grenzfälle des Gleichgewichtes an Gewölben und Pfeilern zu untersuchen. Darauf baut *Fleckner* seine These auf, dass statische Berechnungen die Grundlage der Dimensionierung gotischer Tragsysteme waren, die er durch einen „Indizienbeweis“ zu erhärten versucht. *Antonio Becchi* kritisierte 2006 *Fleckners* fragwürdigen „Indizienbeweis“ und bezeichnete ihn als Karikatur des Denkens [137].

## 2.6 Die linear-elastische Analyse und die nichtlineare FE-Analyse

Von zahlreichen Baustatikern wurden die grafostatischen Untersuchungsmethoden wenn schon nicht als falsch, so doch als äußerst grob betrachtet. Die Berechnung hätte auf Basis der Elastizitätstheorie erfolgen sollen, doch wurde diese nicht auf räumliche Gewölbe wie Kuppeln und Kreuzgewölbe angewandt, da es sehr schwierig war, für derart komplexe Tragwerke Lösungen für die Gleichgewichts-, Material- und Kompatibilitätsgleichungen zu finden.

Die erste elastische Analyse eines gotischen Gebäudes geht wohl auf *Robert Mark* zurück. In den 1960er-Jahren setzte er das spannungsoptische Verfahren zur experimentellen Bestimmung des Spannungszustandes einiger französischer Kathedralen ein. Da mit dieser Methode nur der Spannungszustand elastischer Scheiben gemessen werden kann, untersuchte *Mark* scheibenförmige Modelle des Querschnitts gotischer Kathedralen (Bild 23).

*Pieper* kritisierte, dass von solchen Messungen für Baukonstruktionen aus Mauerwerk kaum ausreichende Übereinstimmung mit der Wirklichkeit zu erwarten sei [133]. Gleichwohl wurden in den 1970er- und 1980er-Jahren elastische Analysen mithilfe der Finite-Elemente-Methode (FEM) vorgenommen, die maßgeblich von den Arbeiten von *Mark* beeinflusst waren [138]. Das Problem hierbei besteht darin, dass das Tragwerk als Kontinuum mit bekannten elastischen Eigenschaften und präzise bekannten Randbedingungen modelliert wird. Da dies auf gemauerte Gebäude nicht zutrifft, handelt es sich bei der FE-Analyse von Mauerwerksbauten nach der Elastizitätstheorie um eine rein „akademische“ Übung. Noch 2001 kritisierten *Herrbruck*, *Groß* und *Wapenhans* die

# MARIENKIRCHE LÜBECK

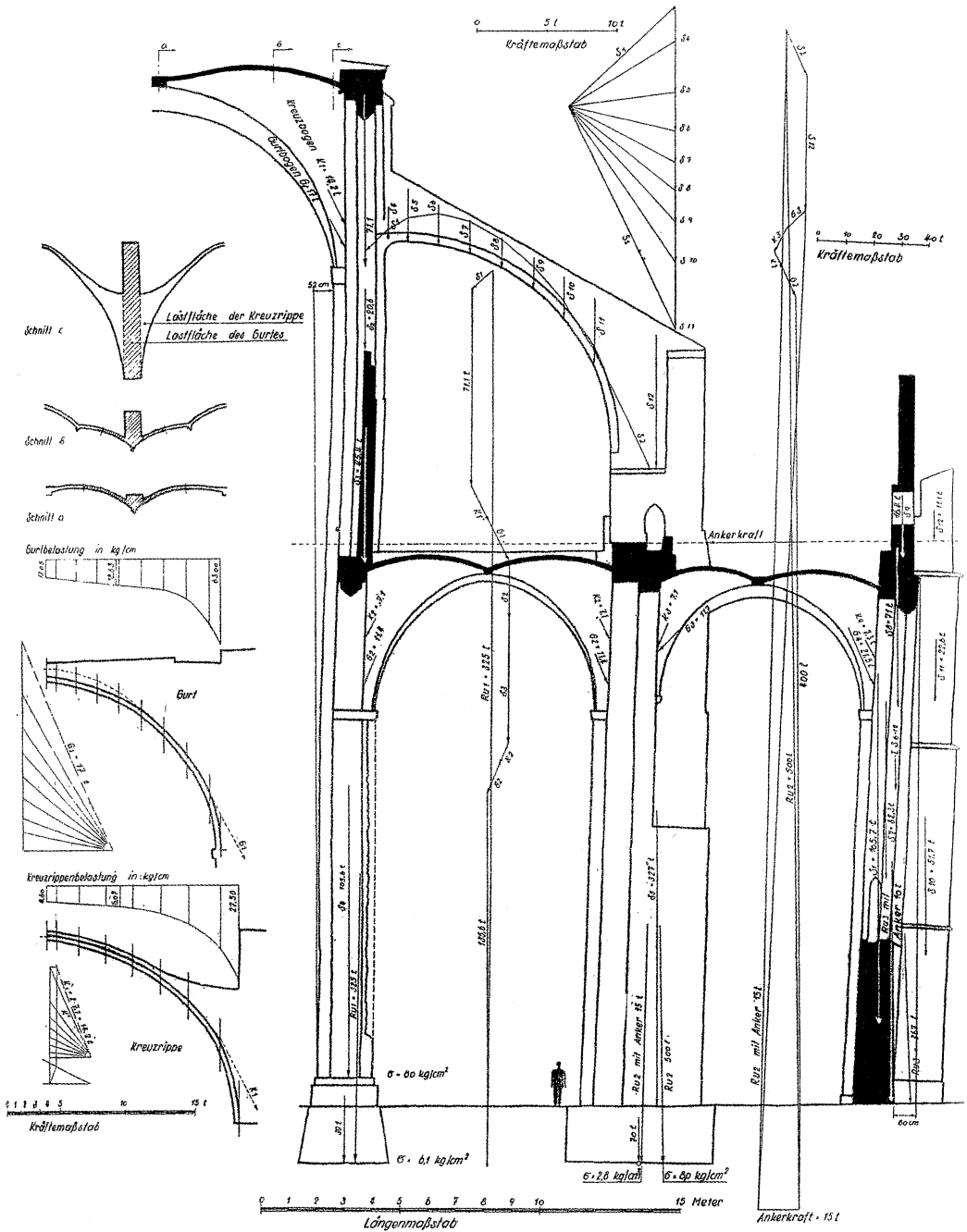
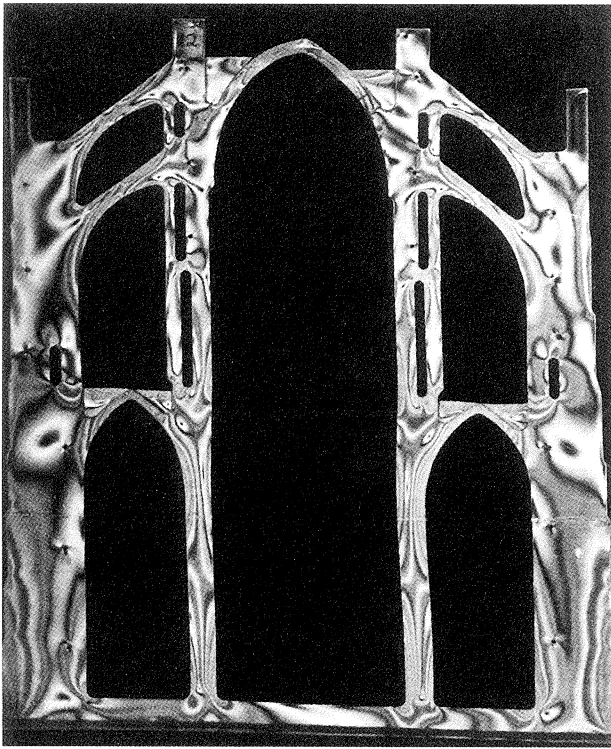


Bild 22. Grafostatische Untersuchung der Lübecker Marienkirche nach Pieper [132]





**Bild 23.** Spannungsoptische Aufnahme eines gotischen Kathedralenquerschnitts nach Mark (aus: [133])

linear-elastische Analyse von Gewölbebrücken, wie sie nach dem damaligen Stand der DIN 1053 und des EC 6 zugelassen war, als „Kaputtrechnung“ und plädierten deshalb für eine nichtlineare Analyse. „Allerdings: Eine Wunderwaffe ist die nichtlineare Analyse nicht, aber in vielen hoffnungslos erscheinenden Fällen (...) eine ausgezeichnete Alternative“ [139]. Auch *Christiane Kaiser* kommt in ihrer 2005 fertig gestellten Dissertation über die Fleischbrücke Nürnberg (1596–1598) zum Ergebnis, dass eine Modellierung als eingespannter elastischer Bogen zu keinem akzeptablen Ergebnis führt ([140], S. 207). Einige FE-Programme lassen die Simulation eines unilateralen Materials zu, das Zugspannungen ausschließt. Es gibt hierfür verschiedene Möglichkeiten, aber in der Regel handelt es sich um einen iterativen Prozess. Im Anschluss an eine erste elastische Analyse werden diejenigen Knoten, an denen Zug auftritt, „gebrochen“ und es bilden sich Diskontinuitätslinien. Die neue Struktur wird erneut analysiert, und nach einigen Iterationen konvergiert der Prozess gegen eine Lösung, in der nur Druckkräfte auftreten. Dies ist natürlich wesentlich besser als die normale linear-elastische Analyse.

*Schlegel* und *Rautenstrauch* stellten im Jahre 2000 ein durch Versuche verifiziertes elastoplastisches Berechnungsmodell zur räumlichen Untersuchung von Mauerwerkstrukturen vor, bei dem das Mauerwerk mithilfe eines verschmierten Ersatzkontinuums beschrieben wird [141]. Auf dieser Grundlage gelang es, die von 1846 bis 1851 erbaute 78 m hohe und 574 m lange Göltzschtalbrücke erstmals nachzurechnen [142]. Bild 24 zeigt das aus 46.504 Elementen und 63.336 Knoten bestehende dreidimensionale FE-Modell mit insgesamt 190.008 Freiheitsgraden. Zur Beschreibung der Festigkeit des Mauerwerkverbandes waren 9 Materialparameter erforderlich. Es konnte die Standsicherheit der Eisenbahnbrücke und die Zulässigkeit der neu hinzugefügten Befahreinrichtung gemäß der geltenden Normen nachgewiesen werden. Die Autoren weisen darauf hin, „dass lineare Berechnungen zum Beispiel nicht die Aktivierung der Bogentragwirkung unter Eigengewicht abbilden können. (...) Ebenso könnten Lastumlagerungen, wie sie insbesondere infolge von Temperaturbeanspruchungen zu verzeichnen sind, insofern nennenswerte nichtlineare Effekte auftreten, dann als sehr problematisch einzuschätzen sein. Als weitere Not-

wendigkeit zur realitätsnahen Erfassung der Bauwerksbeanspruchung ergibt sich die dreidimensionale Strukturmodellierung. Nur am 3-D-Modell ist es möglich, die Ausmittigkeit und ungünstige Überlagerung verschiedener Einwirkungen zu berücksichtigen sowie die volle Aktivierung der Tragreserven der Mauerwerkskonstruktion sicherzustellen“ [142].

Es taucht unwillkürlich die Frage auf, welche FE-Modelle eingesetzt werden sollen, um die für das Tragverhalten von Mauerwerk so wesentliche Diskontinuität und Irregularität zu berücksichtigen. Natürlich muss auch die Belastungsgeschichte in Rechnung gestellt werden, hängt doch der Endzustand auch von der zeitlichen Abfolge der Belastungen und Bewegungen ab, denen die Tragstruktur ausgesetzt war. So schlugen *Schlegel, Konietzky und Rautenstrauch* 2005 vor, Mauerwerk im Rahmen der Diskontinuumsmechanik mithilfe der Distinkt-Element-Methode (DEM) strukturmechanisch zu modellieren [143]. Allerdings können Programme nur dann erfolgreich eingesetzt werden, wenn die Nutzer über die Fähigkeit verfügen, die Ergebnisse zu interpretieren und die Analyse ggf. anzupassen.

*Barthel* legte schon 1993/94 eine vorzügliche Untersuchung gotischer Kreuzgewölbe vor [111, 144, 145], die wesentliche Aspekte der Tragstrukturanalyse von Kreuzgewölben berücksich-

tigt und einen historischen Überblick über die eingesetzten Verfahren enthält. Außerdem trägt sein Buch [111] viele Informationen über Messungen und Schäden an Gebäuden zusammen, die sonst nur schwer aus der einschlägigen Literatur erschließbar wären. *Barthel* stellt die Resultate einer nichtlinearen FE-Analyse vor, die Vorhersagen über die durch bestimmte Arten des Nachgebens der Widerlager erzeugten Risse für verschiedene Gewölbetypen erlauben. Eines der Resultate besteht darin, dass selbst eine geringfügige Verschiebung von 0,5 bis 2 mm bei einer Spannweite von 10 m (d. h. 1/20.000 bis 1/5.000 der Spannweite!) bereits zu Rissbildungen und einer drastischen Veränderung des inneren Spannungszustandes und des Wertes des Horizontalschubs führt. Letzterer fällt je nach Gewölbeform um bis zu 64% ab (s. Tabelle in Bild 25). Es ist offensichtlich, dass ein Werkzeug mit einem solchen Unsicherheitsgrad bei derart kleinen Verschiebungen, die sich an Tragwerken aus Mauerwerk gar nicht messen lassen, unbrauchbar ist. *Barthels* Studie wies auf, dass von einer linear-elastischen FE-Analyse von Gewölben und Tragwerken aus Mauerwerk abgesehen werden sollte.

Selbstverständlich sind – wie schon bei der elastischen Analyse ebener Gewölbe Ende des 19. Jahrhunderts – nichtlineare FE-Analysen von räumlichen Gewölbe notwendig, aber sie

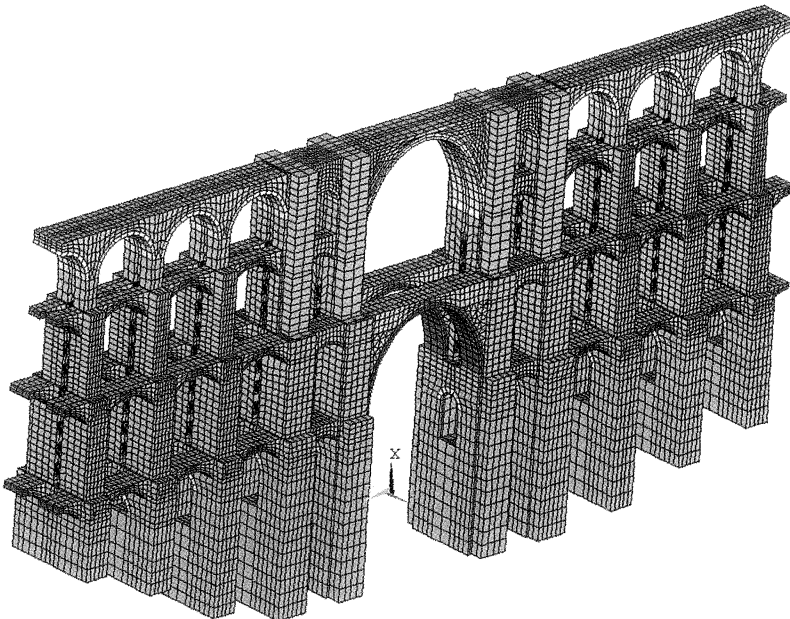
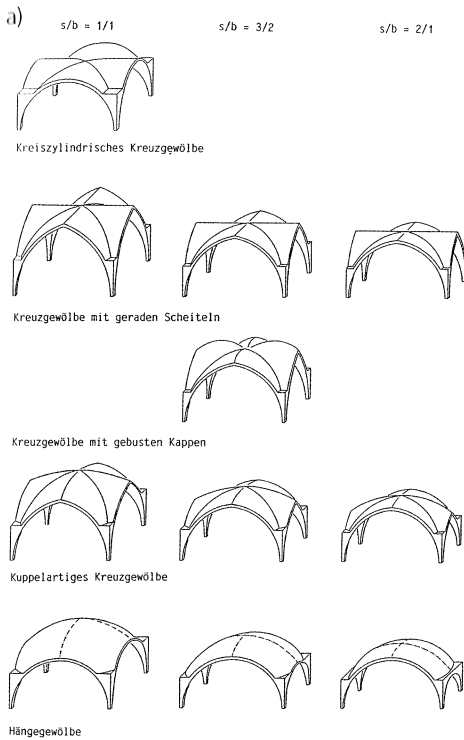


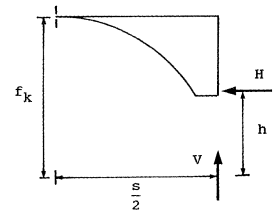
Bild 24. FE-Modell der Göltschtalbrücke [142]



b)

	$s/b$	$v$	$v/(g \frac{s}{2} \frac{b}{2})$	$H/(g \frac{s}{2} \frac{b}{2})$	$h/f_k$
Kreiszyl.	1/1	0,0	1,07	1,03	0,49
Kreuzgew.	1/1	2,0	1,07	0,77	0,34
Kreuzgew. mit geraden Scheiteln	3/2	0,0	1,19	0,83	0,44
	3/2	1,0	1,19	0,61	0,29
	1/1	0,0	1,17	0,73	0,45
	2/1	0,0	1,24	0,91	0,44
Gebüstes Kreuzgew.	3/2	0,0	1,41	0,76	0,29
	3/2	0,5	1,41	0,73	0,28
Kuppelartiges Kreuzgewölbe	3/2	0,0	1,11	0,89	0,46
	3/2	2,0	1,11	0,64	0,27
	1/1	0,0	1,13	0,78	0,44
	2/1	0,0	1,12	0,94	0,48
Hängesgewölbe	3/2	0,0	1,14	0,83	0,34
	3/2	2,0	1,14	0,68	0,27
	1/1	0,0	1,19	0,70	0,33
	2/1	0,0	0,82	0,89	0,39

s große Spannweite  
b kleine Spannweite  
 $f_k$  Stichtiefe des Kreuzbogens  
g Gewicht pro Flächeneinheit  
v Auflagerverschiebung in mm am berechneten System  
V Vertikalkraft eines Viertels  
H Horizontalkraft eines Viertels  
h Höhe der Horizontalkraft über dem Kämpfer



**Bild 25.** Analyse von Kreuzgewölben nach Barthel [111]: a) wichtige Typen von Kreuzgewölben, b) Ergebnisse aus der linearen und nichtlinearen FE-Analyse

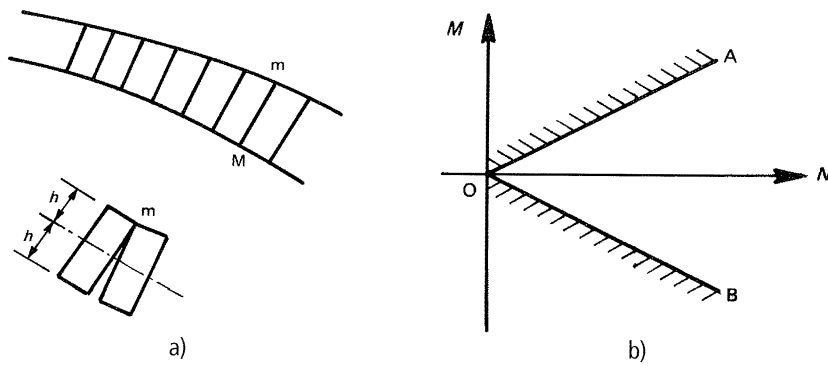
reichen nicht aus, das Tragverhalten vollständig zu erfassen: Erforderlich ist die Beobachtung der Tragstruktur, das Experiment und – last but not least – konstruktions- und wissenschaftshistorisches Wissen, um der Natur der aus der Vergangenheit existierenden gemauerten Bauwerke gerecht zu werden. So konnte *Anne Coste* schon Anfang der 1990er-Jahre am Beispiel der Kathedrale von Beauvais konkret zeigen, wie die FE-Analyse erfolgreich in die Strategie der Erhaltung historisch bedeutsamer Bauwerke integriert werden kann [146]. Gleichwohl muss bei nichtlinearen FE-Analysen immer beachtet werden, dass die Lösung der Gleichungssätze der Materialgesetze, Gleichgewichts- und Kompatibilitätsbedingungen sehr empfindlich auf die Änderung der Randbedingungen und des inneren Zusammenhangs – wie etwa Risswachstum – reagiert. Das mechanische Verhalten von historischen Tragwerken aus Mauerwerk ist selbst geschichtlich: Zur adäquaten Erfassung des Tragverhaltens solcher Tragsysteme ist die geschichtliche Erkenntnis unhintergebar.

### 3 Zur Traglastanalyse von Gewölben

Nach Darstellung der Entwicklungsgeschichte der Gewölbetheorie in den Abschnitten 1 und 2 werden im Folgenden die traglasttheoretischen Ansätze zur Modellierung des Tragverhaltens gewölbter Steinkonstruktionen behandelt. Die Arbeiten von *Heyman* zeigen auf, wie die auf Rissanalysen fußenden Gewölbetheorien des 18. und 19. Jahrhunderts die Traglasttheorie gewölbter Steinkonstruktionen befruchtet haben.

#### 3.1 Zum Materialverhalten von Mauerwerk aus Sicht der Traglasttheorie

Die ursprünglich für Stahltragwerke formulierte Traglasttheorie lässt sich auch auf gemauerte Tragwerke anwenden, sofern das Mauerwerksmaterial bestimmte Bedingungen erfüllt. Als Erster schlug *Drucker* vor, die Traglastanalyse zur Untersuchung des Gleichgewichts und Versagens von Keilsteingewölben anzuwenden, und



**Bild 26.** a) Ausbildung eines Gelenks zwischen zwei Gewölbesteinen, b) Momenten-Normalkraft-Interaktionsdiagramm mit Fließfläche von starrem, unilateralem Mauerwerk [89]

Kooharian schrieb – Druckers Vorschlag folgend – im Jahre 1952 die erste moderne Veröffentlichung zu diesem Thema [147]; ein Jahr später folgte die Veröffentlichung von Onat und Prager [148]. In seiner 1959 publizierten Einführung in die Plastizitätstheorie erörterte Prager die an die Keilsteine zu stellenden Materialbedingungen, um die Traglasttheorie streng anzuwenden und die entsprechende Fließfläche zeichnen zu können [149]. Als ein weiterer Markstein ist eine Veröffentlichung von Heyman aus dem Jahre 1966 zu werten, in der erstmals auf strenge und allgemeingültige Weise die Anwendung der Traglasttheorie nicht nur auf Keilsteingewölbe, sondern auf beliebige gemauerte Tragwerke dargelegt und besprochen wird [150]. In der Folgezeit steuerte Heyman zahlreiche Veröffentlichungen bei, die die Anwendung der Traglasttheorie auf verschiedene Tragwerke aus Mauerwerk wie ebene Gewölbe, Kuppeln, Fächergewölbe, Kreuzgewölbe, Türme und Turmspitzen beleuchten sowie Wege zur Beurteilung der Sicherheit dieser Tragwerke oder ganzer gemauerter Tragsysteme aufzeigen. Heymans Beitrag war so grundlegend, dass es schwer fällt, sich den heutigen Stand der Technik ohne sein Œuvre vorzustellen. Seine Veröffentlichungen wurden zweimal zusammengestellt: zunächst in spanischer Übersetzung im Jahre 1995 [151] und dann als Nachdruck im Jahre 1996 [152]. Heyman selbst hat die Theorie gemauerter Tragwerke in einem 1995 veröffentlichten Buch zusammengefasst [89]. Im Folgenden werden die wichtigsten Gesichtspunkte dieser Theorie vorgestellt und dabei hervorgehoben, auf welche Weise aktuelle Probleme des Gewölbebaus mit der von Heyman in die Traglasttheorie eingefügten

Bruchtheorie des 18. und frühen 19. Jahrhunderts gelöst werden können.

Um die Theorie gemauerter Tragwerke in den Kontext der Traglasttheorie stellen zu können, muss das „Material“ Mauerwerk drei Bedingungen erfüllen, die Heyman die „Prinzipien der Traglastanalyse von Mauerwerkskonstruktionen“ nannte:

1. Die Druckfestigkeit von Mauerwerk ist unendlich,
2. Die Zugfestigkeit von Mauerwerk ist null.
3. Das Gleiten benachbarter Mauersteine ist nicht möglich.

Die erste Aussage ist unsicher, da es offensichtlich kein Material von unendlicher Festigkeit gibt. Jedoch liegen selbst in den größten gemauerten Konstruktionen die Spannungen um eine bis zwei Größenordnungen unter der Druckfestigkeit des Steins. Somit handelt es sich um eine vernünftige Annahme, die am Ende der Analyse überprüft werden kann. Die zweite Aussage liegt auf der sicheren Seite, weist doch der Mörtel zwischen den Mauersteinen eine gewisse Haftung auf. Die dritte Aussage schließlich hängt mit den hohen Reibungskoeffizienten des Mauerwerks ( $\mu = 0,6$  bis  $0,7$ , was Reibungswinkeln zwischen  $35^\circ$  und  $39^\circ$  entspricht) zusammen: Die von den Druckspannungen erzeugten Reibungskräfte verhindern das Gleiten benachbarter Mauersteine.

Wenn das Mauerwerk als Material diese Bedingungen erfüllt, muss für jeden Querschnitt die auf der Querschnittsfläche senkrecht stehende Komponente der Resultierenden der wirksamen Spannungen eine Druckkraft sein, deren Durchstoß-

punkt innerhalb des Querschnitts liegt. Greift die Druckkraft am Querschnittsrand an, so bildet sich ein Gelenk aus (Bild 26 a). Dies führt zu einer Fließfläche, die durch zwei Geraden begrenzt wird [149, 150] (Bild 26 b).

### 3.2 Von Rissen und der „wahren“ Stützlinie im Gewölbe

In Abschnitt 1 wurde gezeigt, dass für die Ingenieure des 19. Jahrhunderts die Kenntnis der Lage der „wahren“ Stützlinie von grundlegender Bedeutung war. Für die elastische Analyse ebener Gewölbe sprach ja gerade, dass aus den Elastizitätsbedingungen die Lage der Stützlinie berechnet werden konnte. Im Folgenden wird dieses Problem im Kontext der Traglasttheorie besprochen.

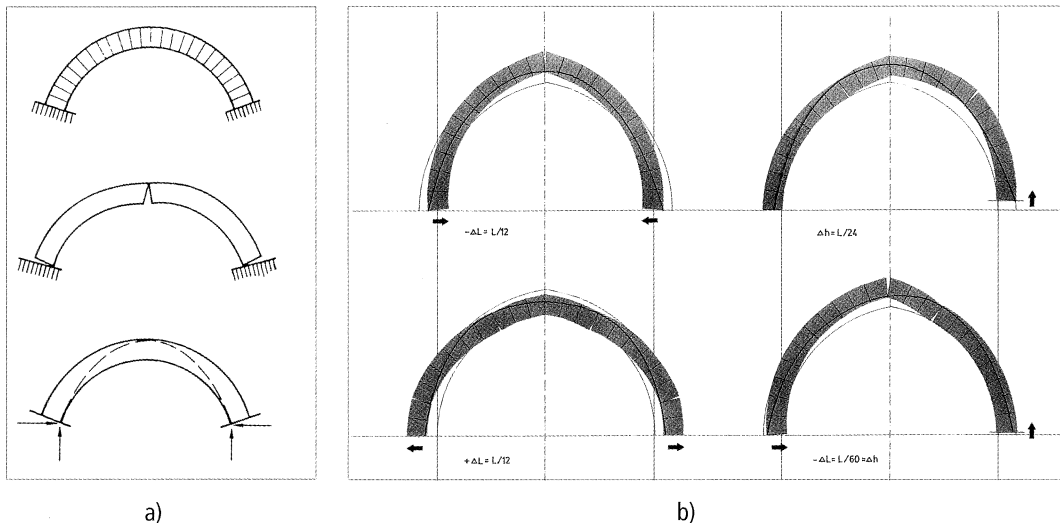
Hierzu wird ein Gewölbe auf einem Lehrgerüst betrachtet (Bild 27 b, [89]). Nachdem das Lehrgerüst entfernt wird, beginnt das Gewölbe, gegen die Widerlager zu drücken. Reale Widerlager sind nicht starr und geben zwangsläufig um einen gewissen Betrag nach. Die Spannweite wird dadurch größer und das Gewölbe muss sich an die geänderte Geometrie anpassen. Die Frage ist nun, wie ein Gewölbe, das aus dem oben beschriebenen starren, unilateralen Material besteht, dies bewerkstelligt. Die Antwort lässt sich leicht an vielen Brücken und auch bei Tests mit Gewölbe-Modellen beobachten: Rissbildung ermöglicht die Bewegung. Ein Riss öffnet sich am Schlussstein

(nach unten) und zwei weitere an den Widerlagern (nach oben).

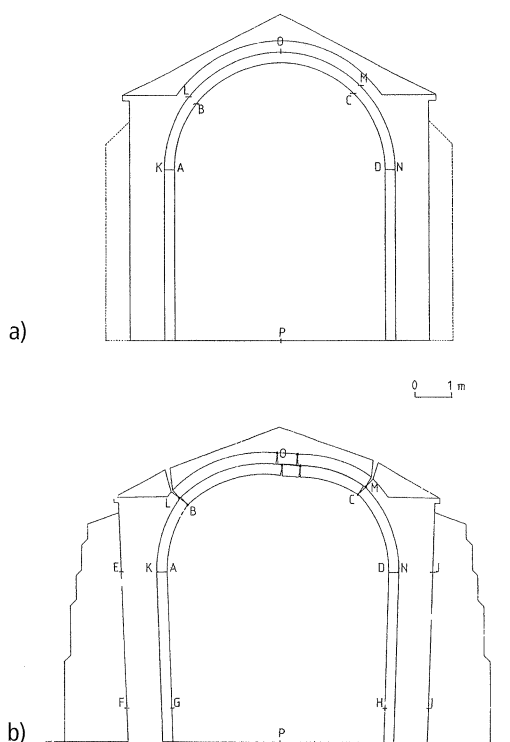
Das Gewölbe wird dreigelenkig; damit wird es statisch bestimmt, d. h. die Lage der Stützlinie wird durch drei Gelenke fixiert (Bild 27 a). Die Bewegung kann asymmetrisch sein – möglicherweise gibt etwa das rechte Widerlager nicht nur horizontal, sondern auch vertikal nach. Jeder möglichen Bewegung entspricht ein bestimmtes Rissmuster: Auf Änderung der Randbedingungen reagiert das Gewölbe mit einer Öffnung und Schließung der Risse. Dies lässt sich an Modellen beobachten; selbst einfache, „ebene“ Pappmodelle erbringen sehr gute Ergebnisse [11, 153] (Bild 27 b).

Risse sind daher gar nicht gefährlich. Die Fähigkeit des Tragwerks, auf Änderung der Randbedingungen zu reagieren, liegt gerade in der Möglichkeit zur Rissbildung begründet, was auf die Materialeigenschaften zurückzuführen ist: unendliche Druckfestigkeit, kein Widerstand gegen Zug und Ausschluss der Möglichkeit des Gleitens.

Die örtliche Verteilung der Risse legt die Position der Stützlinie eindeutig fest. Ändert sich die Rissverteilung im Gewölbeprofil, dann ändert sich auch die Lage der Stützlinie und damit auch der Schnittkraftzustand (Bild 27 a). Im Modell sind die Bewegungen sehr groß; aber selbst kleine Bewegungen, die per Augenschein nicht wahrnehmbar sind, wirken sich auf dieselbe Weise aus. Leider ist es nicht möglich, diese Art von



**Bild 27.** a) Rissbildung in einem Gewölbe nach Entfernung des Lehrgerüsts [89], b) verschiedene Rissmuster infolge von Kämpferbewegungen [11]



**Bild 28.** Tonnengewölbe mit großen Verschiebungen: a) ursprünglicher Zustand mit unzureichenden Stützpfeilern, b) aktueller Zustand – real, ohne Vergrößerung der Bewegungen [155]

Störungen zu kennen oder vorherzusagen, und so gleicht es der Quadratur des Kreises, die real sich einstellende Stützlinie zu kennen, d. h. zu wissen, in welchem Gleichgewichtszustand sich das Gewölbe befindet. Es gibt jedoch zwei Extremlagen der Stützlinie, die dem minimalen und dem maximalen Horizontalschub entsprechen (s. Bild 9a).

Die Risse verhalten sich wie Gelenke, und es sind genau die im vorhergehenden Abschnitt angegebenen Materialeigenschaften, welche die Gelenkbildung ermöglichen. 2004 veröffentlichten *Jagfeld* und *Barthel* ihre experimentell abgesicherten Forschungsergebnisse zur Gelenkbildung in historischen Tragwerken aus Mauerwerk [154]. Dem Konzept der Ausbildung von „Gelenken“ kommt eine Schlüsselrolle beim Verständnis gemauerter Tragwerke zu. Insbesondere sind die Verformungen in keinerlei Hinsicht „elastisch“; vielmehr sind sie das Ergebnis einer Unterteilung des Tragwerks in eine bestimmte Anzahl von

Starrkörpern, die mechanisch über Gelenke miteinander gekoppelt sind und bestimmte Bewegungen zulassen. In Bild 28 ist das ursprüngliche, mit unzureichender Abstützung errichtete, halbkreisförmige Tonnengewölbe gerissen, und die Wände haben sich geneigt, bis neue, massive Stützpfeiler angeordnet wurden. Bild 28 b zeigt den aktuellen Zustand ohne Vergrößerung der Bewegungen (Verbreiterung der ursprünglichen Spannweite von 6,5 m um ca. 300 mm). Risse sind an sich ungefährlich; aber große, ungehinderte Widerlagerverschiebungen können zum globalen Versagen des Tragwerks führen.

### 3.3 Versagen von Gewölben

Da das Material unendlich druckfest ist, muss der Einsturz durch Ausbildung eines kinematisch zulässigen Versagensmechanismus herbeigeführt werden (s. Bild 6 c). Berührt die Stützlinie den Rand des Gewölbeprofils, bildet sich ein „Gelenk“ aus, das eine Rotation ermöglicht. Drei Gelenke ergeben ein statisch bestimmtes Gewölbe; ein weiteres Gelenk kann das Gewölbe in einen kinematisch zulässigen Gelenkmechanismus überführen (Bild 29). Ein Anstieg der Belastung über jenen für die Ausbildung des Gelenkmechanismus erforderlichen Betrag hinaus führt daher zum Versagen des gesamten Gewölbes, ohne dass dabei das Material zerdrückt wird. Bei einem stabilen Gewölbe kann dieser Fall auftreten, wenn es zusätzlichen Belastungen ausgesetzt wird, welche die Stützlinie hinreichend verformen. Wiederum veranschaulicht das Kettenlinienmodell diesen Grenzzustand des Gleichgewichts von Gewölben (Bild 29).

### 3.4 Die Grenzlastsätze der Traglasttheorie für Gewölbe

Wenn im Gewölbeprofil eine Stützlinie eingezeichnet werden kann, dann verfügt das Gewölbe über mindestens eine Möglichkeit, dass es unter der gegebenen Belastung standfest ist. Aber bedeutet dies auch, dass das Gewölbe tatsächlich stabil ist? Oder könnte das Gewölbe einen Weg finden, zu versagen? Könnte eine kleine, unvorhergesehene Bewegung eine Rissbildung bewirken, die schließlich ein Versagen zur Folge hat? Die Lösung dieses Problems gelang erst im 20. Jahrhundert durch die Adaption der Traglasttheorie auf Tragwerke aus Mauerwerk. Aus Platzgründen wird auf eine Darstellung der Ursprünge und der Entwicklung der Traglasttheorie verzichtet, deshalb sei hier auf die Bücher und Aufsätze

von Heyman verwiesen – insbesondere auf sein 1998 publiziertes Buch „Structural analysis: a historical approach“ [22].

So besagt das Sicherheitstheorem – auch statischer Grenzlastsatz oder statischer Satz genannt –, dass das Tragwerk nicht versagen wird und als „sicher“ zu betrachten ist, wenn ein Gleichgewichtszustand gefunden werden kann, der die

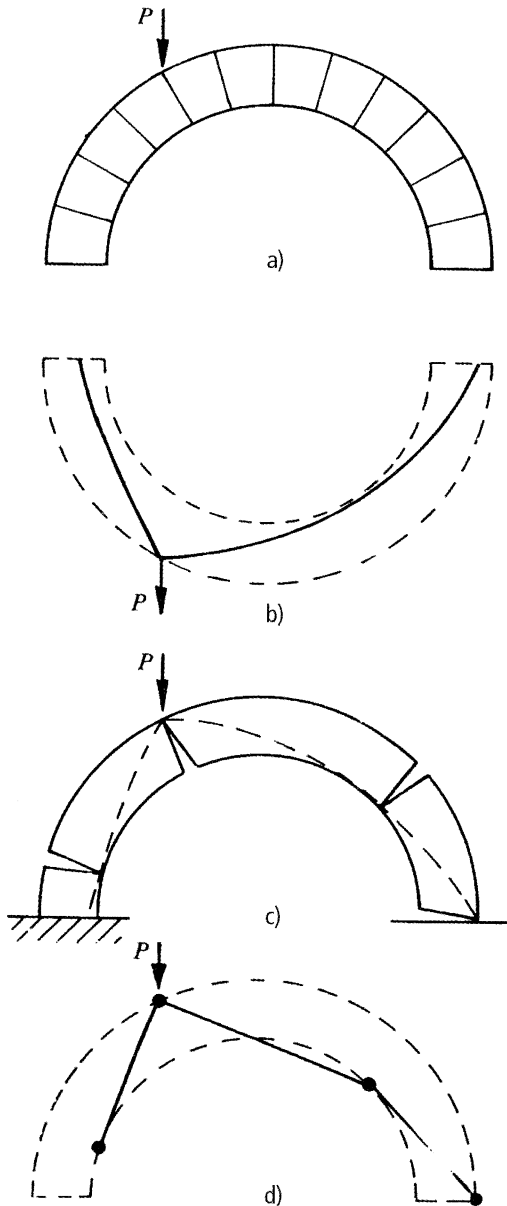
Fließbedingung nicht verletzt: ein solcher Gleichgewichtszustand ist statisch zulässig. Damit ist die untere Schranke der Traglast bekannt. Die obere Schranke der Traglast, die sich aus einer zulässigen zwangsläufigen kinematischen Kette ergibt und mit dem Prinzip der virtuellen Verformungen quantifiziert werden kann, wird durch den kinematischen Grenzlastsatz oder kinematischen Satz festgelegt: eine solche kinematische Kette ist kinematisch zulässig (s. Bild 29 c, d).

Im Falle des Gewölbes erfüllt jede für die gegebene Belastung konstruierte Stützlinie die Gleichgewichtsbedingungen. Die Anforderungen an das Material wurden oben bereits genannt. Die wichtigste Bedingung lautet, dass das Material unter Druckspannung stehen muss, d. h., dass in jedem Querschnitt die Spannungsergebnisse innerhalb des Gewölbeprofils liegen müssen. Verläuft also die Stützlinie vollständig im Gewölbepprofil (Fließbedingung), dann ist dies ein hinreichender Beweis dafür, dass das Gewölbe stabil ist und es unter der gegebenen Belastung nicht versagen wird.

Über die Randbedingungen trifft das Sicherheitstheorem keine Aussagen. Im Gewölbe kommt es als Reaktion auf Bewegungen der Widerlager, wie in Bild 27 b gezeigt wurde, zur Rissbildung: Es stellt sich ein neuer Gleichgewichtszustand ein, d. h. die Stützlinie verlagert sich, wird aber niemals das Gewölbepprofil verlassen und niemals ausreichend viele Gelenke ausbilden, um das Gewölbe in einen Versagensmechanismus zu überführen. Das Sicherheitstheorem der Traglasttheorie bietet daher eine Lösung für das Problem der Ermittlung einer charakteristischen Stützlinie: Es ist nicht möglich, die „wahre“ Stützlinie zu kennen, aber dies ist auch gar nicht wichtig, da die Sicherheit des Tragwerks berechnet werden kann, ohne Annahmen über dessen tatsächlichen Zustand treffen zu müssen.

### 3.5 Die Sicherheit von Gewölben

Mit den beiden Grenzlastsätzen kann die Sicherheit von Gewölben berechnet werden. Heyman schlug einen geometrischen Sicherheitsfaktor vor. Dieser ergibt sich aus dem Vergleich der Geometrie des realen Gewölbes mit der des Gewölbes minimaler Dicke, das die gegebenen Lasten gerade trägt: Aus Bild 30 a geht hervor, dass das Gewölbe gemäß dem Sicherheitstheorem sicher ist, weil sich eine mögliche Stützlinie finden lässt, die vollständig im Gewölbepprofil liegt. Wird nun die Gewölbedicke verringert, so wird schließlich ein bestimmter Wert erreicht, bei dem



**Bild 29.** Versagen eines Halbkreisgewölbes unter einer Einzellast [89]

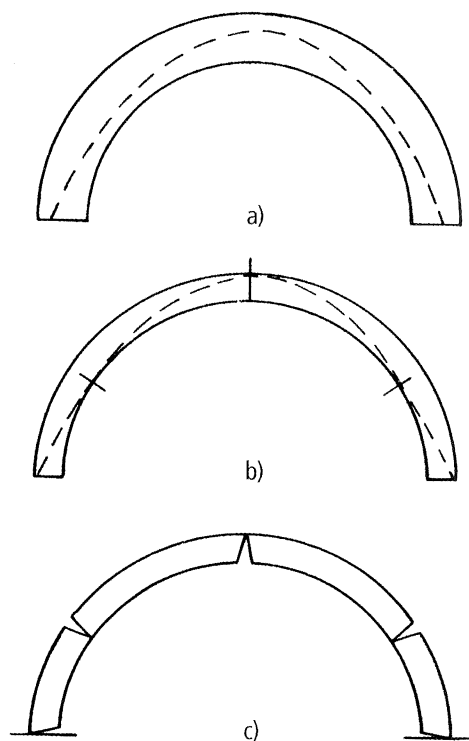
nur noch eine einzige Stützlinie im Gewölbeprofil existiert (Bild 30 b). Diese Stützlinie berührt den Rand des Gewölbeprofils – aus Symmetriegründen – an fünf Punkten. Es liegen dann fünf Gelenke vor; nach dem kinematischen Grenzlasteratz befindet sich das Gewölbe in einem instabilen Gleichgewicht und würde bei geringster Laststeigerung versagen (obere Schranke der Traglast).

Nun kann die Sicherheit des ursprünglichen Gewölbes quantifiziert werden, indem seine Gewölbedicke (Bild 30 a) mit der Minimaldicke dieses Grenzgewölbes (Bild 30 b, c) verglichen wird. Weist das reale Gewölbe die doppelte Dicke gegenüber dem Grenzgewölbe auf, dann beträgt der geometrische Sicherheitsfaktor 2. Im Falle einer Brücke ist das Grenzgewölbe für die ungünstigste Laststellung zu ermitteln [156]. Aus der Untersuchung bestehender Gewölbe und Brücken empfiehlt Heyman für die ungünstigste Laststellung den Wert von 2 [157].

Die Ermittlung des exakten Werts für den geometrischen Sicherheitsfaktor erfordert mitunter aufwendige Berechnungen. Es lässt sich jedoch sehr einfach eine untere Grenze bestimmen. Um beispielsweise zu zeigen, dass der geometrische Sicherheitsfaktor für ein bestimmtes Gewölbe für eine gegebene Belastung größer oder gleich 2 ist, ist es hinreichend, eine Stützlinie innerhalb der mittleren Hälfte des Gewölbeprofils zu zeichnen. Für einen geometrischen Faktor von 3 oder höher muss die Stützlinie innerhalb des mittleren Drittels, d. h. im Kern des Gewölbequerschnitts liegen – dies ist nichts anderes als die Mittlere-Drittel-Regel (middle-third rule). Die Grenzlasterätze liefern eine strenge Bestätigung für die intuitiven Einsichten solcher Gewölbe-theoretiker wie *Gregory* im 17., *Couplet* im 18., *Rankine* im 19. und *Swain* im 20. Jahrhundert.

Natürlich handelt es sich bei der Bestimmung der Stützlinie nach der Elastizitätstheorie ebenfalls um eine Verifizierung der Sicherheit des Gewölbes, wenn die sich ergebende Stützlinie vollständig im Gewölbeprofil verläuft. Der Unterschied ist nur, dass der „Elastiker“ glaubt, er hätte die „wahre“ Stützlinie gefunden, wohingegen der „Plastiker“ weiß, dass die mithilfe der Elastizitätstheorie errechnete Stützlinie nur eine aus unendlich vielen möglichen, im Gewölbeprofil verlaufenden Stützlinien ist, die mit der Belastung im Gleichgewicht stehen.

Ein wichtiges Ergebnis der Traglastanalyse von Gewölben besteht darin, dass sie für die Tragstrukturanalyse den Gleichgewichtsansatz, d. h. die einfache Statik i. S. der Theorie statisch be-



**Bild 30.** a) Stabiles Halbkreisgewölbe, b) Halbkreisgewölbe minimaler Dicke mit Stützlinie und c) zugehöriger kinematisch zulässiger Gelenkmechanismus

stimmter Systeme, ermöglicht. Der Erste, der explizit auf den Gleichgewichtsansatz und seine Bedeutung für die baustatische Standsicherheitsbeurteilung hinwies, war *Heyman*. Erstmals erwähnt er dies 1967 [158], dann allgemeiner 1969 [159]; und später betont er in vielen seiner Veröffentlichungen die außerordentliche Bedeutung dieses Korollariums.

Die Aufgabe des Tragwerkplaners besteht darin, für das untersuchte Tragwerk nicht etwa den „wahren“ Gleichgewichtszustand, sondern sinnvolle Gleichgewichtszustände zu ermitteln. Und tatsächlich verfolgten diesen Ansatz auch alle großen Bauingenieure und Architekten. In den Proportionsregeln der alten Baumeister war der Gleichgewichtsansatz implizit vorhanden. Explizit findet er sich in den Werken von *Mailart*, *Torroja*, *Nervi*, *Candela* und *Gaudí* wieder, um nur einige der großen Bauingenieure und Architekten des vergangenen Jahrhunderts zu nennen.



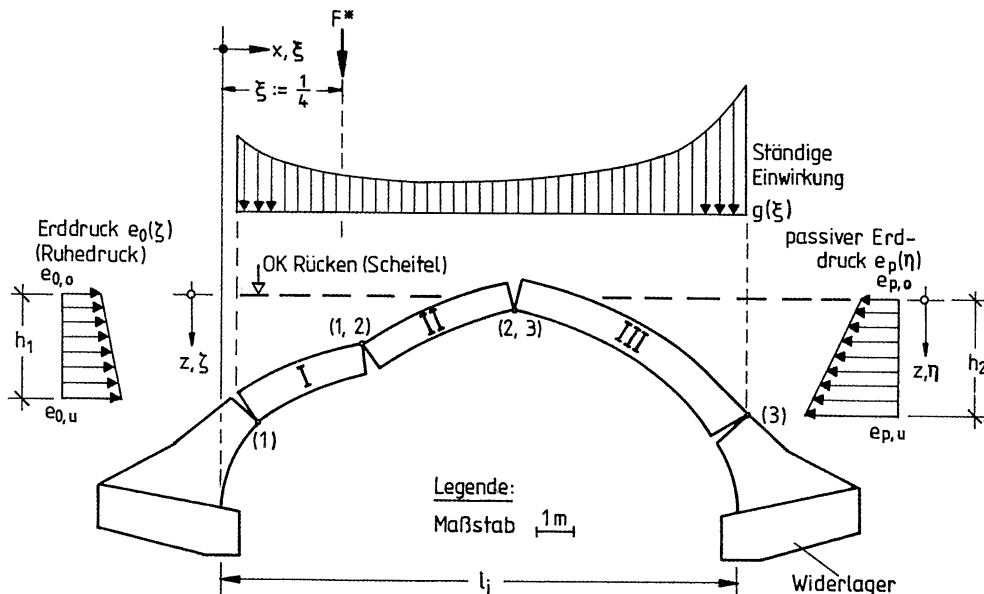
### 3.5.1 Analyse einer gewölbten Eisenbahnbrücke

Wilmar Weber untersuchte in seiner 1999 an der TU München abgeschlossenen Dissertation die gewölbte, eingleisige Eisenbahnbrücke bei Schauenstein in Oberfranken [7]. Die 1919 errichtete korbbogenförmige Eisenbahnbrücke besitzt eine lichte Weite von  $l_j = 14$  m und eine lichte Pfeilhöhe von  $f_j \approx 4,20$  m. Die Scheiteldicke beträgt  $d_s = 0,75$  m und nimmt zu den Kämpfern hin zu. Das Brückengewölbe besteht aus Stampfbeton mit plattigen, scharfkantigen Zuschlägen mit Vorsatz-Quadermauerwerk aus Fichtelgebirgsgranit, das als verlorene Schalung diente. Bild 31 stellt die Bruchfigur der untersuchten Eisenbahnbrücke bei Schauenstein für die statische Bruchlast  $F^*$  dar.

Streng genommen ist diese Eisenbahnbrücke keine reine Gewölbebrücke i. S. der in Abschnitt 1 vorgeschlagenen Definition des Begriffs „Gewölbe“, da das Brückengewölbe nicht aus Steinen gefügt wurde. Nach dem Befund Webers zeigte der Stampfbeton bei seinen Materialkennwerten eine ausgeprägte Anisotropie in Radial- und Tangentialrichtung, sodass andererseits die Brücke auch nicht als elastischer Bogen modelliert werden kann: Das Tragverhalten der Brücke ist gewölbeförmig – insofern kommen für Tragstruk-

turanalysen nur Gewölbetheorien in Betracht, so dass im Folgenden vereinfachend von Brückengewölbe gesprochen wird.

Weber entwickelt auf der Basis der Grenzlastsätze der Traglasttheorie ein Hybridverfahren zur Ermittlung der oberen Schranke der Grenztragfähigkeit von gewölbten Eisenbahnbrücken mit einer Öffnung. Für die Validierung seines Verfahrens wurden 1989 erstmalig statische Bruchlastversuche an einer eingleisigen gewölbten Eisenbahnbrücke durchgeführt. Hierzu wurde die Einzellast  $F$  in einem Viertelpunkt des Gewölbes der Eisenbahnbrücke bei Schauenstein eingepreßt und bis zu der Gesamtpressenkraft von  $F^* = 3405$  kN gesteigert; dabei stellte sich der in Bild 31 dargestellte Versagensmechanismus ein, der prinzipiell mit dem von Heymann in Bild 29 c angegebenen übereinstimmt. Für diese im Versuch sich einstellende kinematische Kette berechnet Weber nach dem kinematischen Satz der Traglasttheorie die obere Schranke der Grenztragfähigkeit  $F^* = 3308$  kN; dabei legte er das Prinzip der virtuellen Verschiebungen zugrunde und berücksichtigte insbesondere horizontale Einwirkungen wie etwa den Erddruck. Damit verfehlte die rechnerisch ermittelte Grenztragfähigkeit die messtechnisch ermittelte nur um 4,1 % (Defizit). Die von Weber abgeleiteten Formeln zur rechnerischen Ermittlung der horizontalen und vertikalen



**Bild 31.** Versagensmechanismus einer einfeldrigen Gewölbebrücke mit vertikalen und horizontalen Einwirkungen sowie unverschieblichen Widerlagern nach Weber [7]

Komponenten von gemessenen, großen Verschiebungsfeldern im Rahmen seiner kinematischen Untersuchung der Eisenbahnbrücke bei Schauenstein stellen eine Novität dar. Zukünftigen Forschungsbedarf sieht *Weber* u. a. in der Herleitung eines Maßes der „Kantungsfestigkeit“, die bei der Ausbildung der Gelenke eine grundlegende Rolle spielt. Die Gelenkbildung von gemauerten Tragwerken ist Thema des 2004 von *Jagfeld* und *Barthel* publizierten Aufsatzes [154]. Zwischenzeitlich wurden Forschungsprojekte zum Thema exzentrisch druckbeanspruchtes Mauerwerk abgeschlossen und in den Eurocode EC 6 und diverse Nationale Anwendungs-Dokumente (NAD) eingearbeitet. So legt DIN 1053-100 vom August 2006 bei exzentrischer Belastung von Mauerwerk starr-plastisches Verformungsverhalten, d. h. eine rechteckförmige Spannungsverteilung zugrunde [160]. Für einen Mauerwerksquerschnitt der Dicke  $d$  und der Breite  $b$  greift nach DIN 1053-100 die aufnehmbare Normalkraft  $N_T$  bei einer Exzentrizität von  $e = d/3$  an. Der Abstand von  $N_T$  zum nächstliegenden Faserrand ist also  $d/6$ , d. h. der rechteckige Spannungsbereich besitzt die Länge  $d/3$ ; daraus ergibt sich mit  $\beta_R$  als Rechenwert für die Druckfestigkeit die aufnehmbare Normalkraft zu  $N_T = (d/3) \cdot b \cdot \beta_R$  [161]. Festgehalten werden muss, dass durch den Übergang zum rechteckigen Spannungskörper in DIN 1053-100 der gewollte Anhebung der Tragfähigkeiten durch den EC 6 Rechnung getragen wurde [165] und es nicht um das Phänomen der Gelenkbildung geht. Dennoch wird damit der Nachweis der Querschnittstragfähigkeit von Gewölben realitätsgerechter.

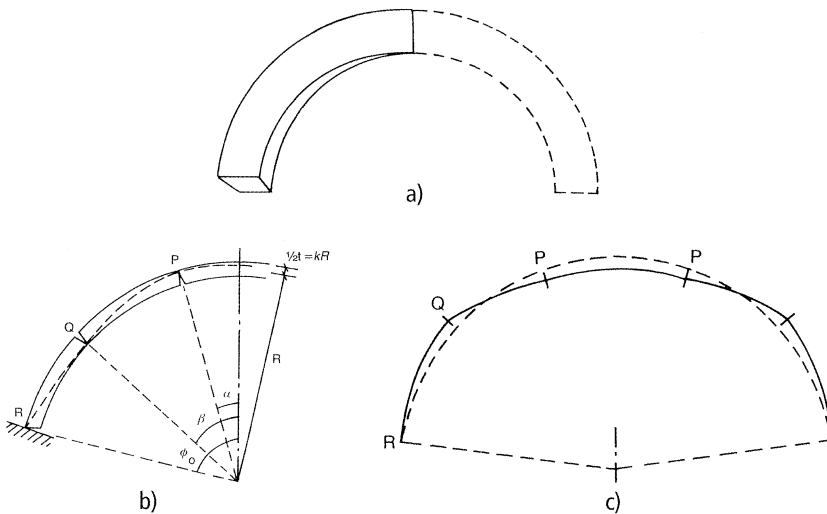
In *Webers* Dissertation findet sich auch eine Tabelle zur Brückenerhebung bei den europäischen Eisenbahnen, die fast alle Anfang der 1990er-Jahre datieren. So gehörten zum Eisenbahnnetz der ehemaligen Staatsbahnen in

- Frankreich 13.167 (Nov. 1992),
- Großbritannien ca. 13.000 (Feb. 1993),
- Deutschland 9.146 (1993),
- Tschechoslowakei 3.213 (Jan. 1992),
- Spanien 3.205 (Juni 1992)

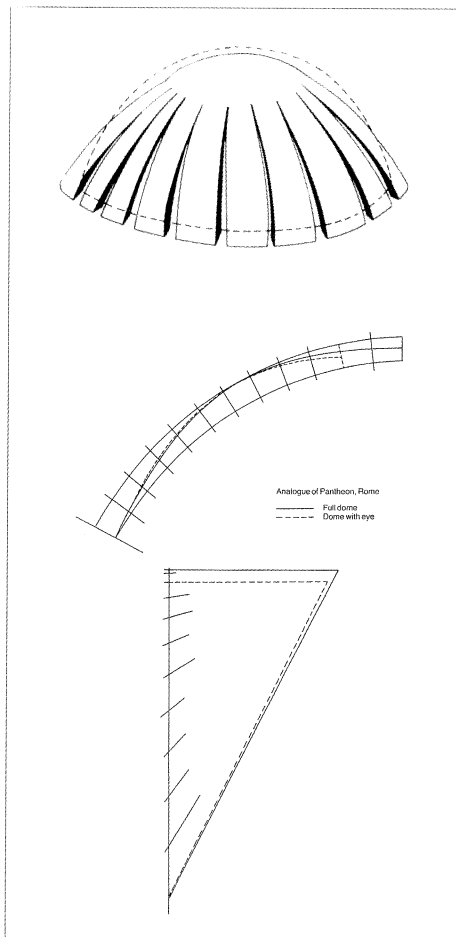
gewölbte Eisenbahnbrücken, d. h. Brücken, die von Schienenfahrzeugen befahren werden; ihr prozentualer Anteil am gesamten Brückenbestand der o. g. Staatsbahnen ist erheblich: Frankreich 47%, Großbritannien 50%, Deutschland 29%, Tschechoslowakei 34% und Spanien 50%. Daraus wird ersichtlich, dass – etwa bei weiterer Steigerung der Dienstlasten – ein großer Bedarf an realitätsnahen statischen Nachweisen gewölbter Eisenbahnbrücken entsteht. Hierzu könnten traglasttheoretisch begründete Nachweisverfahren eine wichtige Rolle spielen.

### 3.5.2 Die Analyse von Kuppeln: Risse und Gleichgewicht

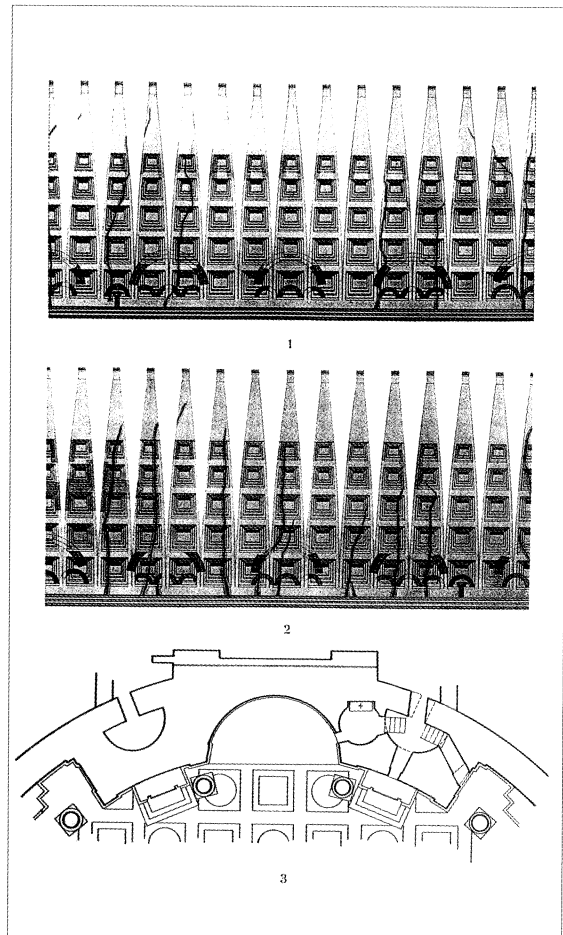
Das Sicherheitstheorem legitimiert auch die „Streifenmethode“ [88], mit der sich auf einfache Weise aus unendlich vielen, innerhalb einer räumlichen Tragstruktur möglichen Gleichgewichtszuständen ein Gleichgewichtszustand selektieren lässt. So lässt sich eine Kuppel in eine Reihe von durch Schnitte entlang der Meridianebenen der Kuppel erhaltene ebene Gewölbe



**Bild 32.** Versagen einer Kuppel nach Heyman [162]



a)



b)

**Bild 33.** a) Typische Rissstruktur einer Kuppel und Stützlinien für minimalen Horizontalschub des Pantheons nach Heyman [162], b) Risse in der Kuppel des Pantheons nach Terenzio [168]

zerlegen (Bild 32). Jeweils zwei „Orangenscheiben“ bilden ein Gewölbe; ist es möglich, eine Stützlinie innerhalb dieses Ersatzgewölbes zu ziehen, so liegt ein möglicher Gleichgewichtszustand vor: Die Kuppel ist sicher, d. h. sie wird nicht versagen. Diese Anwendung des Sicherheitstheorems bestätigt die Gültigkeit aller historischen Analysen, die auf der in Abschnitt 2.4 vorgestellten „Streifenmethode“ basieren.

Dagegen ist die Versagensanalyse von Kuppeln deutlich komplizierter. Um zu demonstrieren, dass ein Tragwerk versagen wird, muss ein kinematisch zulässiger Versagensmechanismus gefunden werden, was bei räumlichen Gewölben nicht immer einfach ist. So nahmen Kobell [107] und Beckett [163] das Gelenk fälschlicherweise

am Scheitel an. Die erste strenge und korrekte Untersuchung des Versagens von Kuppeln erfolgte durch Heyman [162, 164, 165] (s. a. Oppenheim et al. [166]).

In den meisten Fällen wird ein typisches Rissmuster aus in Meridianrichtung verlaufenden Rissen beobachtet, das durch leichtes Nachgeben des Strebewerks (meist der Tambourwand) entsteht. Es wurde bereits in Abschnitt 2.2 darauf hingewiesen, dass sich die drei Mathematiker schon 1742 bei ihrer Tragstrukturanalyse der Peterskuppel dieser Tatsache bewusst waren. Auch taucht diese Interpretation in einigen Untersuchungen von Kuppelrissen im 19. Jahrhundert auf; ein Überblick über die Riss- und Schadensanalyse gemauerter Tragwerke findet sich bei Corradi

[167]. *Heyman* war aber der Erste, der eine systematische und strenge Untersuchung des Problems vornahm [162]. Die Kuppel drückt nach außen und das Mauerwerk des Widerlagersystems gibt nach. Unweigerlich bilden sich in Meridianrichtung verlaufende Risse aus, wie in Bild 33 a zu sehen ist. Die Stützlinie bzw. -fläche verlagert sich auf der Suche nach der Position mit minimalem Horizontalschub nach oben. Falls sich im Kuppelscheitel keine Laterne befindet, berührt die Linie den Gewölberücken nicht am Scheitel, sondern in einem gewissen Abstand dazu. Der obere Teil bleibt dann rissfrei, eine kleine Gewölbekappe, die von einer Reihe radialer Bögen getragen wird. Das Studium der Stützlinie erlaubt die Berechnung der theoretischen Ausdehnung der Risse. *Heyman* führte für die Kuppel des Pantheons in Rom eine solche Berechnung durch, die eine gute Übereinstimmung mit den von *Terenzio* während der Restauration in den 1930er-Jahren beobachteten Rissen aufwies (Bild 33 a und b).

### 3.5.3 Gotische Gewölbe

Das Sicherheitstheorem verifiziert die Streifenmethode bei der Tragstrukturanalyse gotischer Gewölbe. Wiederum liegen alle in Abschn. 2.5 beschriebenen Analysen von *Planat*, *Mohrmann*, *Pieper* u. a. auf der sicheren Seite, und *Heyman* ließ diesen Ansatz wieder aufleben [152, 165]. Auch *Mohrmanns* Tabelle zur rationalen Berechnung des Gewölbeschubs (s. Bild 17) wird von der Theorie abgesichert. Natürlich führen unterschiedliche Streifen zu unterschiedlichen Werten für den Gewölbeschub, aber wenn für einen beliebigen Streifen ein System von Stützlinien existiert, das die Lasten abtragen kann und eine hinreichende geometrische Sicherheit aufweist, so besteht kein Zweifel daran, dass das Gewölbe nicht versagen wird und mindestens die berechnete Sicherheit aufweist.

Hinsichtlich der Risse in gotischen Gewölben gelten dieselben Beobachtungen wie bei Kuppeln. Die Risse sind so zu interpretieren, dass sie die Tragwerke in eine bestimmte Anzahl miteinander gekoppelter Starrkörper unterteilen, welche die von der Umgebung eingprägten Bewegungen ermöglichen. Wie schon oben angemerkt, waren sich die Bauingenieure und Architekten über das Vorhandensein von Rissen vollkommen im Klaren (z. B. [108, 169, 170]). Bild 34 a zeigt eine Zeichnung von *Pol Abraham* mit typischen Rissen; in Bild 34 b ist *Heymans* Interpretation dargestellt. Das in Längsrichtung ver-

laufende Tonnengewölbe reißt auf die typische Art eines Gewölbes; das quer dazu verlaufende Tonnengewölbe muss brechen, um die Bewegung mitmachen zu können. Die Rippen folgen der allgemeinen Bewegung [171]. Die Rissbildung ändert nichts an der Sicherheit des Gewölbes, sofern die Bewegungen klein sind, d. h. die vor und nach der Bewegung aufgestellten Gleichgewichtsgleichungen dieselben sind [152].

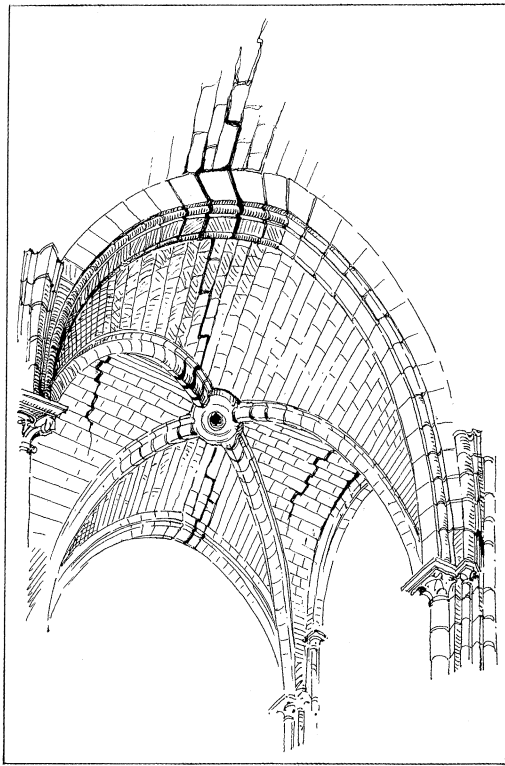
## 3.6 Gemauerte Gebäude: Risse und Gleichgewicht

Das Sicherheitstheorem bestätigt auch die Gültigkeit der zuvor besprochenen Tragstrukturanalysen druckbeanspruchter Bauwerke auf der Basis der Theorie statisch bestimmter Systeme von *Planat*, *Mohrmann*, *Rubió* etc. Dabei ist es wichtig, die Ziele der Analyse nicht aus den Augen zu verlieren. Bei der Untersuchung historischer Bauwerke gibt es in der Regel zwei Hauptanliegen:

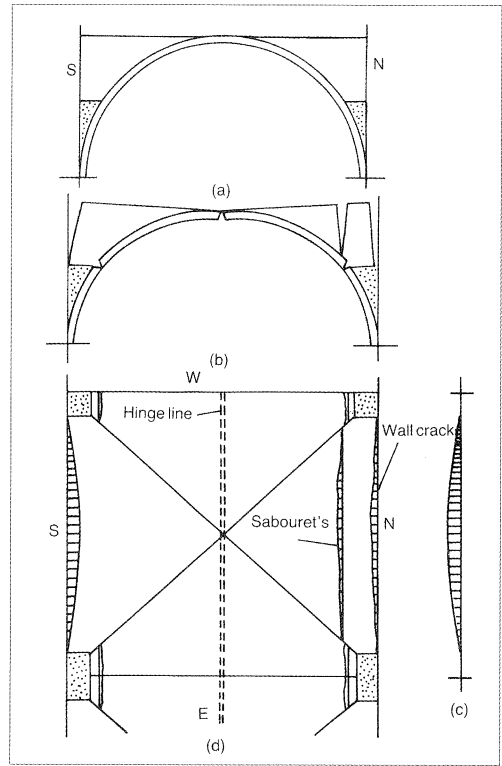
1. Verständnis des Tragverhaltens,
2. Verständnis der Rissursachen und Bedeutung der Risse für das Tragwerk.

Nur auf dieser Grundlage kann der Bauingenieur und Architekt eine Diagnose stellen und entscheiden, ob und ggf. wie weiter vorgegangen werden soll. Um zu einem Verständnis des Tragverhaltens zu gelangen, müssen mögliche Gleichgewichtszustände untersucht werden. Zur Realisierung des zweiten Hauptanliegens ist eine Vorstellung darüber erforderlich, welche Art von Bewegungen die Ursache für das beobachtete Rissmuster gewesen ist.

Die Untersuchung des Gleichgewichts lässt sich am besten durchführen, indem zunächst diejenigen Elemente „identifiziert“ werden, die das Tragwerk ausmachen; der allererste Teil der Analyse ist somit die Entscheidung, was zum Tragwerk zählt und was nicht. Bei gotischen Kathedralen sind das Tragwerk und seine Elemente offenkundig, bei romanischen oder byzantinischen Kirchen dagegen ist es weniger deutlich auszumachen. Es muss hervorgehoben werden, dass diese einleitende Analyse von ausschlaggebender Bedeutung ist. Eine falsche Identifizierung des Tragwerks und seiner Elemente hat unweigerlich irreführende Ergebnisse zur Folge. Glücklicherweise gibt es nur eine begrenzte Anzahl von Grundtypen historischer gemauerten Tragwerke und ihrer Elemente, und die meisten davon hat *Heyman* bereits untersucht [150–152].



a)



b)

**Bild 34.** Risse in einem vierteiligen gotischen Gewölbe: a) Beschreibung von *Pol Abraham* [170] und b) baustatische Interpretation nach *Heyman* [171]

Die Realisierung des zweiten Hauptanliegens ist im Allgemeinen schwieriger. Der Tragwerksplaner muss die typischen Rissmuster für die unterschiedlichen Gewölbetypen und ihre Beziehung zu den Widerlagerbewegungen parat haben und sich durch Analogschluss überlegen, welche Art von Bewegungen Ursache für die in dem betrachteten Gebäude beobachteten Rissmuster gewesen sein könnte. Komplizierte Muster, die durch das Zusammenspiel mehrerer Bewegungen entstanden sind, fordern vom Tragwerksplaner ein hohes Maß an Erfahrung und Sachverstand.

Manchmal wird der Gleichgewichtsansatz mit grafostatischen Methoden gleichgesetzt. Doch sind grafostatische Methoden das Werkzeug; während der Gleichgewichtsansatz den theoretischen Rahmen darstellt, der streng aus dem Sicherheitstheorem der Traglasttheorie abgeleitet ist. Die Gleichgewichtsgleichungen können grafisch oder analytisch gelöst werden – dies macht keinen Unterschied. Einige Probleme lassen sich

besser grafisch behandeln: Der Tragwerksplaner sieht die Kräfte wirken und sieht auch die Form des Tragwerks, und da die Standsicherheit des gemauerten Bauwerks eine Frage der Geometrie ist, ist es vielleicht sinnvoll, geometrische Verfahren einzusetzen. Andererseits erfordern gewisse Probleme einen Grad an Genauigkeit, der eine analytische Lösung nahe legt. In anderen Fällen wiederum gestalten sich die Prüfungen am wenigsten aufwendig, wenn unmittelbar die Gleichgewichtsgleichungen aufgestellt werden und das Verhalten bei Variation der Hauptparameter untersucht wird.

Computerprogramme können ebenfalls eine große Hilfe darstellen. *Livesley* war der Erste, der 1978 ein Computermodell für ein aus starren Keilsteinen bestehendes Gewölbe implementierte [172]. Nach ihm hat es zahlreiche weitere theoretische Beiträge gegeben (z. B. [173]). Dennoch gibt es nur wenige fertige Softwarepakete, die den Tragwerksplaner bei der Untersuchung des Gleichge-

wichts von Gewölben und Stützfeilern unterstützen. Für Gewölbebrücken gibt es gute Computerprogramme (z. B. „Archie-M“ und „Ring“), die auf Grundlage der Traglasttheorie arbeiten. Im Falle gemauerter Gebäude ist die Geometrie wesentlich komplizierter, und es ist deutlich schwieriger, leicht zu benutzende Programme zu entwickeln, die an die jeweils interessierenden Gebäude angepasst werden können. O'Dwyer schlug 1999 einen seilpolygonbasierten Ansatz vor, bei dem es sich um die Computerversion von Gaudís Seilmodellen handelt [174]. Maunder erörterte 1995 die Möglichkeit, FE-Programmpakete an den oben vorgestellten Gleichgewichtsansatz anzupassen, der die Gewölbesteine als Starrkörper modelliert [175].

1998 schlägt Kurrer die Schaffung einer computergestützten Grafostatik vor: „Sie müsste modular aufgebaut sein, d. h. jede einzelne Konstruktion der grafischen Statik, wie beispielsweise das Seilpolygon, wäre vom Benutzer als Modul abrufbar, am Bildschirm darstellbar und mit anderen Modulen zu konkreten Konstruktionen im Sinne der grafischen Statik koppelbar. Durch integrierte CAD-Module und auf Näherungsverfahren basierende Bemessungsmodule könnten Resultate der grafostatischen Synthese unmittelbar auf die Ebene der Tragstruktur überführt werden. Die computergestützte grafische Statik wäre gleichsam ein Scharnier zwischen Entwurf und Konstruktion (...). Nicht zuletzt wäre sie ein geeignetes hochschuldidaktisches Mittel, Bauingenieur- und Architekturstudenten in der Tragstruktursynthese zusammenzuführen (...)“ [176] (s. a. [25]). Ein Beispiel einer computergestützten grafostatischen Untersuchung konnten Gerhardt, Pichler und Kurrer Anfang 2003 präsentieren [177]. Das 2003 von Pichler und Kurrer an der Universität der Künste Berlin geplante Labor für computergestützte Grafostatik wurde leider nicht realisiert, weil Professor Pichler im Frühjahr 2004 tödlich verunglückte.

Ochsendorf und seine Mitarbeiter schließlich entwickeln am MIT derzeit Programme zur grafostatischen Analyse gemauerter Tragwerke – die Ergebnisse sind bislang viel versprechend; sie erwarten, dass der Einsatz dieser Programme in der Statiklehre großen Nutzen bringt [178, 179]. Diese Arbeiten der MIT-Forscher bilden den Kristallisationskern einer computergestützten Grafostatik.

Alle erwähnten Programme unterstützen den Tragwerksplaner bei der Untersuchung bestimmter, typischer Elemente gemauerter Tragwerke. Dennoch sollte all jenen, die schon mit der Ana-

lyse historischer Tragwerke in Berührung gekommen sind, klar sein, dass jedes einzelne Gebäude, selbst wenn es sich einem bestimmten, bereits untersuchten Typ zuordnen lässt, doch jedes Mal unterschiedliche Probleme aufwirft und es keinen Königsweg für die Problemlösung geben kann. Gefragt sind vielmehr spezialisierte Monografien. Auch eine Sammlung konkreter Tragstrukturanalysen, in der die Analyse den tatsächlich beobachteten Schäden gegenübergestellt wird, würde die Qualität von baustatischen Untersuchungen gemauerter historischer Gebäude beträchtlich verbessern.

## 4 Resümee

*Wer sich fundiertes Wissen über das Gewölbe aneignen möchte, wird dieses nie allein aus den Büchern erlangen, und wir können nicht für uns beanspruchen, solches Wissen zu vermitteln. Wir geben dem Leser nur ein Alphabet an die Hand, mit dessen Hilfe er sein Wissen über tatsächliche Tragwerke und seine durch echte Arbeit gewonnenen praktischen Erfahrungen buchstabieren kann.*

„The Statics of bridges“  
(Die Statik von Brücken), 1861 [180]

Der Gleichgewichtsansatz für die Analyse und Planung gemauerter Tragwerke hat sich als am besten geeignet erwiesen, um das Tragverhalten historischer Tragwerke zu verstehen. Er geht in letzter Instanz auf die Proportionsregeln der alten Baumeister zurück. Die großen Bauingenieure und Architekten des 18. und 19. Jahrhunderts benutzten ihn zur Konstruktion von Brücken und Gebäuden. Der Gleichgewichtsansatz folgte unmittelbar aus dem Sicherheitstheorem der an gemauerte Tragwerke adaptierten Traglasttheorie. Dieses Theorem bildet, wie Heyman es ausdrückte, den „Fels, auf dem, wie man jetzt sieht, die gesamte Lehre von der Statik gegründet ist“ [181]. Dadurch, dass er nur Gleichgewichtslösungen betrachtet, die im Hinblick auf die im Wesentlichen nicht vorhandene Zugfestigkeit des Materials als möglich zu betrachten sind, wird der Tragwerksplaner dazu geführt, sich nur mit den wesentlichen Problemen zu befassen. Die sich ändernden Randbedingungen, über die er praktisch keine Kenntnis erlangen kann, bleiben unberücksichtigt. Über die elastischen Eigenschaften des Mauerwerks wird keine Aussage getroffen. Allein das wirklich Wesentliche an der Komplexität des

Tragwerks wird betrachtet. Diese Aufgabe ist nicht einfach, und kein Computerprogramm kann eine eindeutige Antwort geben, aber dafür zeigt sich das Problem in all seiner faszinierenden Komplexität und Fülle. Jetzt ist der Tragwerksplaner in der Lage, die relevanten Fragen zu stellen und aussagekräftige Antworten zu geben. Diese Aufgabe ist nichts für Amateure; sie lässt sich nur durch jahrelanges forschendes Lernen und unter Rückgriff auf eine langjährige Praxis lösen.

## 5 Literatur

- [1] Grimm, J.; Grimm, W.: Bogen. In: Deutsches Wörterbuch, II. Band, hrsg. v. J. Grimm u. W. Grimm. Leipzig: Verlag von S. Hirzel 1860.
- [2] Grimm, J.; Grimm, W.: Gewölbe. In: Deutsches Wörterbuch, IV. Band, I. Abt. 4. Teil 1. Lieferung, hrsg. v. d. Akademie der Wissenschaften der DDR. Leipzig: S. Hirzel Verlag 1973.
- [3] Zedler, J. H. (Hrsg.): Gewölbe. In: Grosses vollständiges Universal-Lexikon, 10. Band. Halle/Leipzig: Verlag Johann Heinrich Zedler 1735.
- [4] Ersch, J. S.; Gruber, J. G. (Hrsg.): Gewölbe. In: Allgemeine Encyclopädie der Wissenschaften und Künste, 66. Teil. Leipzig: F. A. Brockhaus 1857.
- [5] Badr, I. E. A.: Vom Gewölbe zum räumlichen Tragwerk. Dissertation ETH Zürich 1962.
- [6] Heinrich, B.: Am Anfang war der Balken. Zur Kulturgeschichte der Steinbrücke. Deutsches Museum München 1979.
- [7] Weber, W.: Die gewölbte Eisenbahnbrücke mit einer Öffnung. Begriffserklärungen, analytische Fassung der Umrisslinien und ein erweitertes Hybridverfahren zur Berechnung der oberen Schranke ihrer Grenztragfähigkeit, validiert durch einen Großversuch. Dissertation, Technische Universität München 1999.
- [8] Heinrich, E.: Gewölbe. In: Reallexikon der Assyriologie und Vorderasiatischen Archäologie, 3. Band, hrsg. v. E. Weidner u. W. v. Soden, S. 323–340. Berlin: Walter de Gruyter 1957–1971.
- [9] Viollet-le-Duc, E. E.: Dictionnaire raisonné de l'Architecture Française du XI au XVI siècle. Paris: A. Morel 1854–1868.
- [10] Warth, O.: Konstruktionen in Stein. Leipzig: J. M. Gebhardt's Verlag 1903.
- [11] Huerta, S.: Arcos, bóvedas y cúpulas. Geometría y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica. Madrid: Instituto Juan de Herrera 2004.
- [12] Huerta, S.: Geometry and equilibrium: The gothic theory of structural design. Structural Engineer 84 (2006), S. 23–28.
- [13] Poncelet, J. V.: Examen critique et historique des principales théories ou solutions concernant l'équilibre des voûtes. Comptes-rendus de l'Académie des Sciences 35 (1852), S. 494–502, 531–540, 577–587.
- [14] Winkler, E.: Die Lage der Stützlinie im Gewölbe. Deutsche Bauzeitung 13 (1879), S. 117–119, 127–128, 130 und 14 (1880) S. 58–60.
- [15] Kurrer, K.-E.; Kahlow, A.: Arch and Vault from 1800 to 1864. In: Arch Bridges. History, analysis, maintenance and repair. A. Sinopoli (Ed.), S. 37–42. Rotterdam: A. A. Balkema 1998.
- [16] Holzer, St. M.: Der Bogen im Dach. Zur Entwicklung des weitgespannten Daches 1770–1840 unter dem Einfluss des frühen Bauingenieurwesens. Bautechnik 84 (2007), H. 2, S. 130–146.
- [17] Mairle, L.: Die Entwicklung der Berechnung statisch unbestimmter massiver Bogen und Gewölbe unter dem Einfluss der Elastizitätslehre. Dissertation Technische Hochschule Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig 1933/1935.
- [18] Hertwig, A.: Aus der Geschichte der Gewölbe. Ein Beitrag zur Kulturgeschichte. Technikgeschichte 23 (1934), S. 86–93.
- [19] Timoshenko, St. P.: History of Strength of Materials. With a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures. New York: McGraw-Hill 1953.
- [20] Charlton, T. M.: A history of theory of structures in the nineteenth century. Cambridge: Cambridge University Press 1982.
- [21] Heyman, J.: Coulomb's Memoir on Statics: An Essay in the History of Civil Engineering. Cambridge: Cambridge University Press 1972.

- [22] Heyman, J.: Structural analysis: a historical approach. Cambridge: Cambridge University Press 1998.
- [23] Kurrer, K.-E.: Entwicklung der Gewölbetheorie vom 19. Jahrhundert bis zum heutigen Stand der Wissenschaft am Beispiel der Berechnung einer Bogenbrücke, Teil A + B (maschinenschriftl. Manuskript). Diplomarbeit am Fachgebiet Statik der Baukonstruktionen der TU Berlin 1981.
- [24] Kurrer, K.-E.: Zur Entwicklungsgeschichte der Gewölbetheorien von Leonardo da Vinci bis ins 20. Jahrhundert. *Architectura* 27 (1997), S. 87–114.
- [25] Kurrer, K.-E.: Geschichte der Baustatik. Berlin: Ernst & Sohn 2002.
- [26] Focè, F.: Sulla teoria dell'arco murario. Una rilettura storico-critica. In: *Degli Archi e delle volte. Arte del costruire tra meccanica e stereotomia*. A. Becchi u. F. Focè (Hrsg.), S. 131–213. Venedig: Marsilio 2002.
- [27] Dorn, H. I.: The Art of Building and the Science of Mechanics. A Study of the Union of Theory and Practice in the Early History of Structural Analysis in England. Ph. D. diss. Princeton University 1970.
- [28] Hooke, R.: A description of helioscopes, and some other instruments. London: John & Martin Printer to the Royal Society 1675.
- [29] Gregory, D.: Catenaria. *Philosophical Transactions of the Royal Society* 19 (1697), S. 637–652.
- [30] Emerson, W.: The principles of mechanics. London: W. Ynnys, J. Richardson 1754.
- [31] Hutton, Ch.: The Principles of Bridges. Newcastle: Kincaird and Creech 1772.
- [32] Hutton, Ch.: Tracts on mathematical and philosophical subjects comprising, among numerous important articles, the Theory of Bridges. London: Wilkie and Robinson 1812.
- [33] Robison, J.: Arch. Supplement to the third edition of the *Encyclopaedia Britannica*. Edinburgh: Thomson Bonar 1801.
- [34] Young, Th.: A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts. London: Joseph Johnson 1807.
- [35] La Hire, Ph.: *Traité de mécanique*. Paris: Imprimerie Royal 1695.
- [36] La Hire, Ph.: Sur la construction des voûtes dans les édifices. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris*, année 1712, S. 70–78. Paris 1731.
- [37] Bêlidor, B. F.: *Nouveau cours de Mathématique a l'Usage de l'Artillerie et du Génie*. Paris: Chez Charles-Antoine Jombert 1725.
- [38] Bêlidor, B. F.: La science des ingénieurs dans la conduite des travaux de fortification et architecture civile. Paris: Claude Jombert 1729.
- [39] Perronet, J. R.; Chezy, A.: Formule générale pour déterminer l'épaisseur des piles et culées des arches des ponts, soit qu'elles soient en plein cintre ou surbaissées. In: *Recueil de divers mémoires extraits de la bibliothèque impériale des ponts et chaussées a l'usage de MM. les ingénieurs*, ed. by P. Lesage, Vol. 2, S. 243–273. Paris: Chez Firmin Didot 1810.
- [40] Sganzin, J. M.: Programme ou résumé des leçons d'un cours de constructions, avec des applications tirées spécialement de l'art de l'ingénieur des ponts et chaussées. 5<sup>th</sup>. ed. Liège: Dominique Avanzo 1840–44.
- [41] Couplet, P.: Seconde partie de l'examen de la poussée des voûtes. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences Paris* (1730), S. 117–141.
- [42] Danyzy, A. A. H.: Méthode générale pour déterminer la résistance qu'il faut opposer à la poussée des voûtes. *Histoire de la Société Royale des Sciences établie à Montpellier* 2 (1718–1745), S. 40–56, 203–205 (1732). Montpellier: Jean Martel 1778.
- [43] Boistard, L. C.: Expériences sur la stabilité des voûtes. *Recueil de divers mémoires extraits de la bibliothèque impériale des ponts et chaussées a l'usage de MM. les ingénieurs*, ed. by P. Lesage Vol. 2, S. 171–217. Paris: Chez Firmin Didot 1810.
- [44] Coulomb, C. A.: Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture. *Mémoires de Mathématique et de Physique*, présentés à l'Académie Royale des Sciences par Divers Savants et lus dans ses Assemblées 7 (1773), S. 343–382.
- [45] Audoy: Mémoire sur la poussée des voûtes en berceau. *Mémorial de l'Officier du Génie*, n. 1, 4 (1820), S. 1–96.



- [46] Navier, L. M. H.: *Resumé des Leçons données à l'Ecole des Ponts et Chaussées sur l'Application de la Mécanique à l'Etablissement des Constructions et des Machines*. Paris: Firmin Didot 1826.
- [47] Petit: *Mémoire sur le calcul des voûtes circulaires*. *Mémorial de l'Officier du Génie* 12 (1835), S. 73–150.
- [48] Michon, F.: *Tables et formules pratiques pour l'établissement des voûtes cylindriques*. *Mémorial de l'Officier du Génie* 15 (1848), S. 7–117.
- [49] Poncelet, J. V.: *Solution graphique des principales questions sur la stabilité des voûtes*. *Mémorial de l'Officier du Génie* 12 (1835), S. 151–213.
- [50] Gerstner, F. J. v.: *Handbuch der Mechanik*. Prag: Spurny 1831–1834.
- [51] Méry, E.: *Mémoire sur l'équilibre des voûtes en berceau*. *Annales des Ponts et Chaussées* (1840), S. 50–70.
- [52] Moseley, H.: *On the equilibrium of the arch*. (Read Dec. 9, 1833). *Cambridge Philosophical Transactions* 5 (1835), S. 293–313.
- [53] Kurrer, K.-E.: *Zur Entstehung der Stützlinientheorie*. *Bautechnik* 68 (1991), S. 109–117.
- [54] Young, Th.: *Bridge*. Supplement to the fourth, fifth and sixth editions of the *Encyclopaedia Britannica*. Edinburgh: Archibald Constable 1824, 1<sup>st</sup>. ed. 1817, Vol. 2, S. 497–520.
- [55] Huerta, S.: *Thomas Young's theory of the arch: His analysis of Telford's design for an iron arch of 600 feet span*. In: *Essays in the history of the theory of structures*, in honour of Jacques Heyman, ed. by S. Huerta, S. 189–233. Madrid: Instituto Juan de Herrera, CEHOPU 2005.
- [56] Barlow, W. H.: *On the Existence (practically) of the line of equal Horizontal Thrust in Arches, and the mode of determining it by Geometrical Construction*. *Minutes and Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 5 (1846), S. 162–182.
- [57] Snell, G.: *On the Stability of Arches, with practical methods for determining, according to the pressures to which they will be subjected, the best form of section, or variable depth of voussoir, for any given extrados or intrados*. *Minutes and Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 5 (1846), S. 439–476.
- [58] Kurrer, K.-E.: *Auf der Suche der wahren Stützlinie in Gewölben*. *Humanismus und Technik* (1990), S. 20–54.
- [59] Moseley, H.: *On a new principle in statics, called the principle of least pressure*. *Philosophical Magazine* 3 (1833), S. 285–288.
- [60] Moseley, H.: *The Mechanical Principles of Engineering and Architecture*. London: Longman, Brown, Green and Longmans 1843.
- [61] Scheffler, H.: *Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken*. Braunschweig: Verlag der Schulbuchhandlung 1857.
- [62] Culmann, K.: *Die grafische Statik*. Zürich: Meyer & Zeller 1864/1866.
- [63] Hagen, G.: *Ueber Form und Stärke der gewölbten Bogen*. *Abhandlungen der königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Mathematische Abhandlungen* (1844), S. 51–72.
- [64] Villarceau, A. Y.: *Sur l'établissement des arches de pont, envisagé au point de vue de la plus grande stabilité, mémoire accompagné de tables pour faciliter des applications numériques*. Paris: Imprimerie Impériale 1853.
- [65] Bresse, J. A. C.: *Etudes théoriques sur la résistance des arcs employés dans les ponts en fonte ou en bois*. *Annales des Ponts et Chaussées* 25 (1848), S. 150–193.
- [66] Bresse, J. A. C.: *Recherches analytiques sur la flexion et la résistance des pièces courbes, accompagnées de tables numériques pour calculer la poussée des arcs chargés de poids d'une manière quelconque et leur pression maximum sous une charge uniformément répartie*. Paris: Mallet-Bachelier 1854.
- [67] Saavedra, E.: *Nota sobre la determinación del problema del equilibrio de las bóvedas*. *Revista de Obras Públicas* 8 (1860), S. 101–104.
- [68] Rankine, W. J. M.: *A Manual of Civil Engineering*. London: Griffin Bohn and Company 1862.
- [69] Winkler, E.: *Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit, mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung in der Technik*. Prag: H. Dominicus 1867.

- [70] Castigliano, C. A. P.: *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*. Turin: Augusto Federico Negro 1879.
- [71] Engesser, F.: Ueber die Lage der Stützlinie in Gewölben. *Deutsche Bauzeitung* 14 (1880), S. 184–186, 210, 243.
- [72] Österr. Ingenieur- und Architekten-Verein: Bericht des Gewölbe-Ausschusses. Wien: Im Selbstverlage des Vereines 1895.
- [73] Séjourné, P.: *Grandes Voûtes*. 6 Vols. Bourges: Imprimerie Vve Tardy-Pigelet et Fils 1913–16.
- [74] Rankine, W. J. M.: *A Manual of Applied Mechanics*. London: Charles Griffin 1858.
- [75] Swain, G. F.: *Structural Engineering*. Vol. 3: Stresses, graphical statics and masonry. New York: McGraw-Hill Book Company 1927.
- [76] Foce, F.: On the safety of the masonry arch. Different formulations from the history of structural mechanics. In: *Essays in the history of the theory of structures, in honour of Jacques Heyman*, ed. by S. Huerta, S. 117–142. Madrid: Instituto Juan de Herrera, CEHOPU 2005.
- [77] Lauenstein, R.; Bastine, P.: *Die grafische Statik*. Elementares Lehrbuch für den Schul- und Selbstunterricht sowie zum Gebrauch in der Praxis. 12. Aufl. Leipzig: Alfred Kröner 1913.
- [78] Mörsch, E.: Berechnung von eingespannten Gewölben. *Schweizerische Bauzeitung* 47. Band, 1906, S. 83–85, 89–91.
- [79] Mörsch, E.: *Statik der Gewölbe und Rahmen*. Teil A, II. Band, 3. Teil: Der Eisenbetonbau. Seine Theorie und Anwendung. Stuttgart: Verlag Konrad Wittwer 1947.
- [80] Mörsch, E.: Gewölbte Brücken. In: *Beton-Kalender*, Teil 2, hrsg. v. J. Eibl, S. 1–53. Berlin: Ernst & Sohn 2000.
- [81] Towler, K. D. S.: *The Structural Behaviour of Brickwork Arches*. Ph. D. diss. University of Liverpool 1981.
- [82] Proske, D.; Lieberwirth, P.; van Gelde, P.: Sicherheitsbeurteilung historischer Bogenbrücken (Sonderdruck zum 16. Dresdner Brückensymposium). Dresden: Dirk Proske Verlag 2006.
- [83] Trautz, M.: *Zur Entwicklung von Form und Struktur historischer Gewölbe aus der Sicht der Statik*. Dissertation, Universität Stuttgart 1998.
- [84] Trautz, M.: *Formunvollendet. Eine Trilogie von der Suche nach der Form statisch idealer Kuppeln*. *deutsche bauzeitung* 135 (2001), 11. 11, S. 105–111.
- [85] Heyman, J.: Hooke's cubico-parabolical conoid. *Notes and Records of the Royal Society of London* 52 (1998), S. 39–50.
- [86] Bouguer, P.: *Sur les Lignes Courbes propres a former les Voûtes en Dome*. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris*, année 1734, S. 149–166. Paris 1736.
- [87] López Manzanares, G.: La forma ideal de las cúpulas: el ensayo de Bouguer. *Actas del III Congreso Nacional de Historia de la Construcción*, S. 603–613. Sevilla 26–28 octubre de 2000. Madrid: Instituto Juan de Herrera 2000.
- [88] Frézier, A. F.: *La théorie et la pratique de la coupe de pierres et des bois pour la construction des voûtes et autres parties des bâtiments civils et militaires, ou traité de stéréotomie à l'usage de l'architecture*. 3 Vols. Strasbourg/Paris: Charles-Antoine Jombert 1737–1739.
- [89] Heyman, J.: *The Stone Skeleton*. *Structural Engineering of Masonry Architecture*. Cambridge: Cambridge University Press 1995.
- [90] Bossut, Ch.: *Nouvelles recherches sur l'équilibre des voûtes en dôme*. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris* (1776), S. 587–596.
- [91] Salimbeni, L.: *Degli archi e delle volte* Libri Sei. Verona: Dionigi Ramanzini 1787.
- [92] Berard, J.-B.: *Statique des voûtes*. Paris: Chez Firmin Didot 1810.
- [93] Le Seur, T.; Jacquier, F.; Bošković, R. G.: *Parere di tre mattematici sopra i danni, che si sono trovati nella cupola di S. Pietro*. Roma: 1742.
- [94] López Manzanares, G.: *Teoría de estructuras y restauración en el siglo XVIII: la cúpula de San Pedro de Roma*. *Obra Pública ingeniería y territorio*. *Revista del Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos* 57 (2001), S. 48–59.
- [95] Como, M.: *Un antico restauro statico dell cupola di San Pietro a Roma*. In: *Lo specchio*

- del cielo, ed. by C. Conforti, S. 135–149. Milano: Electa 1997.
- [96] Wapenhans, W.; Richter, J.: Die erste Statik der Welt von 1742 zur Peterskuppel in Rom. Originaltext – Übersetzung – Kommentar. Dresden: Eigenverlag 2001.
- [97] Poleni, G.: Memorie storiche della gran cupola del tempio Vaticano. Padova: Nella Stamperia del Seminario 1748.
- [98] López Manzanares, G.: La contribución de R. G. Boscovich al desarrollo de la teoría de cúpulas: el informe sobre la Biblioteca Cesarea de Viena. Actas del Cuarto Congreso Nacional de Historia de la Construcción, S. 655–665. Cádiz, 27–29 de enero de 2005. Madrid: Instituto Juan de Herrera, SEHC, COAC, CAATC 2005.
- [99] López Manzanares, G.: Boscovich's contribution to the theory of domes: The expertise for the Tiburio of Milan Cathedral. In: Essays in the history of the theory of structures, in honour of Jacques Heyman, ed. by S. Huerta, S. 273–301. Madrid: Instituto Juan de Herrera, CEHOPU 2005.
- [100] Gauthey, E. M.: Dissertation sur les dégradations survenues aux piliers du dome de Panthéon Français, et sur les moyens d'y remédier. Paris: Perronneau Imprimeur 1798.
- [101] Rondelet, J.-B.: Traité théorique et pratique de l'art de bâtir. 7 Vols. Paris: L'auteur 1802–1817.
- [102] Lamé, M. G.; Clapeyron, E.: Mémoire sur la stabilité des voûtes. Annales des Mines 8 (1823), S. 789–836.
- [103] Heyman, J.: On shell solutions of masonry domes. International Journal of Solids and Structures 3 (1967), S. 227–241.
- [104] Dietlein, J. F. W.: Beitrag zur Statik der Kreuzgewölbe. Halle: Hemmerbe und Schwetschte 1823.
- [105] Eytelwein, J. A.: Handbuch der Statik fester Körper: mit vorzüglicher Rücksicht auf ihre Anwendung in der Architektur. Berlin: Real-schulbuchhandlung 1808.
- [106] Persy, N.: Cours de Stabilité des Constructions à l'usage des Élèves de l'École d'Application de l'Artillerie et du Génie. Metz: Lithographie de l'École d'Application 1834.
- [107] Kobell: Beitrag zur Statik der Gewölbe. Allgemeine Bauzeitung (1855), S. 92–110.
- [108] Michon, F.: Instruction sur la stabilité des voûtes et des murs de revêtement. Metz: Lithographie de l'École de Metz 1857.
- [109] Wittmann, W.: Zur Theorie der Gewölbe. Zeitschrift für Bauwesen 29 (1879), S. 61–74.
- [110] Planat, P.: Pratique de la mécanique appliquée à la résistance des matériaux. Paris: La Construction Moderne 1887.
- [111] Barthel, R.: Tragverhalten gemauerter Kreuzgewölbe. Aus Forschung und Lehre, H. 26. Karlsruhe: Universität Karlsruhe 1993.
- [112] Ungewitter, G.: Lehrbuch der gotischen Konstruktionen. III. Auflage neu bearbeitet von K. Mohrmann. 2 Bände. Leipzig: T. O. Weigel Nachfolger 1890.
- [113] Körner, C.: Gewölbte Decken. Handbuch der Architektur. Dritter Teil, 2. Band, H. 3 b. Stuttgart: Arnold Bergsträsser Verlagsbuchhandlung 1901.
- [114] Eddy, H. T.: Researches in Graphical Statics. New York: Van Nostrand 1878.
- [115] Eddy, H. T.: Neue Constructionen aus der grafischen Statik. Leipzig: Teubner 1880.
- [116] Föppl, A.: Theorie der Gewölbe. Leipzig: Felix 1881.
- [117] Dunn, W.: Notes on the Stresses in Framed Spires and Domes. Journal of the Royal Institute of British Architects, Third series, 11 (Nov. 1903 to Oct. 1904) (1904), S. 401–412.
- [118] Huerta, S.: The mechanics of timber vaults: a historical outline. In: Essays in the History of Mechanics, ed. by A. Becchi, M. Corradi, F. Foce and O. Pedemonte, S. 89–133. Basel: Birkhäuser 2003.
- [119] Lévy, M.: La statique graphique et ses applications aux constructions. Paris: Gauthier-Villars 1888.
- [120] Dischinger, F.: Schalen und Rippenkuppeln. In: Handbuch für Eisenbetonbau, 12. Band, II. Teil, hrsg. v. F. v. Emperger, S. 151–371. Berlin: Wilhelm Ernst & Sohn 1928.
- [121] Flüge, W.: Statik und Dynamik der Schalen. Berlin: Springer 1934.
- [122] Planat, P.: Flexion des piliers d'église. Revue Générale de l'Architecture et des Travaux Publics 34 (1877), S. 146–155, 204–212, 245–253.

- [123] Planat, P.: *Pratique de la mécanique appliquée à la résistance des matériaux*. Premier volume: Principes et tableaux graphiques. Poutres droites. Colonnes et piliers. Paris: Aulanier et cie, éditeurs s. a. (ca. 1900).
- [124] Planat, P.: *L'Art de Bâtir*. Vol. 3: Voûtes en maçonnerie. Voûtes d'églises. Flèches et tours. Béton Armé. Silos. Paris: Librairie de la Construction Moderne 1906.
- [125] Benouville, L.: Étude sur la cathédrale de Beauvais. *Encyclopédie d'Architecture* 4 (1891–1892), S. 52–52, 60–62, 68–70.
- [126] Moro, J.L. (Hrsg.): Antoni Gaudí 1852–1926, Katalog zur Ausstellung. Stuttgart: Selbstverlag des Fachgebietes Grundlagen der Planung und Konstruktion im Hochbau der Universität Stuttgart 2002.
- [127] Huerta, S.: Structural Design in the Work of Gaudí. *Architectural Science Review* 49 (2006), n. 4, S. 324–339.
- [128] Graefe, R.: Zur Formgebung von Bogen und Gewölben. *Architectura* 16 (1986), S. 50–67.
- [129] Rubió y Bellver, J.: Conferencia acerca de los conceptos orgánicos, mecánicos y constructivos de la Catedral de Mallorca. *Anuario de la Asociación de Arquitectos de Cataluña* (1912), S. 87–140.
- [130] Rütth, G.: Sicherungsarbeiten am Mainzer Dom. Amöneburg b. Biebrich a. Rhein: Selbstverlag der Portland-Cement-Fabrik Dyckerhoff und Söhne 1928 (?).
- [131] Zorn, E.: Statische Untersuchung der St. Martinskirche in Landshut. Dissertation, Technische Hochschule München 1933.
- [132] Pieper, K.: Von der Statik mittelalterlicher Kirchenbauten. *Baumeister* (1950), S. 600–604.
- [133] Pieper, K.: Sicherung historischer Bauten. Berlin: Wilhelm Ernst & Sohn 1983.
- [134] Grassnick, M.: Die Gotischen Wölbungen des Domes zu Xanten und ihre Wiederherstellung nach 1945. Xanten: Verein zur Erhaltung des Xantener Domes e. V. 1963.
- [135] Segger, J.: Zur Statik gotischer Kathedralen. Dissertation, RWTH Aachen 1969.
- [136] Fleckner, S.: Gotische Kathedralen – Statische Berechnungen. *Bauingenieur* 78 (2003), H. 1, S. 13–23 (Kurzfassung). Die Langfassung ist im Internet unter [www.technikwissen.de/bauingenieur](http://www.technikwissen.de/bauingenieur) erhältlich.
- [137] Becchi, A.: Eggs, turnips and chains: rhetoric and rhetoricians of architecture. In: *Practice and Science in Early Modern Italian Building. Towards an Epistemic History of Architecture*, ed. by H. Schlimme, S. 97–112. Maastrand: Mondadori Electa 2006.
- [138] Mark, R.: *Experiments in Gothic Structure*. Cambridge (Mass.): The MIT Press 1982.
- [139] Herrbruck, J.; Groß, J.-P.; Wapenhans, W.: Gewölbebrücken: Ersatz der linearen ‚Kaputtrechnung‘. *Bautechnik* 78 (2001), H. 11, S. 805–814.
- [140] Kaiser, Chr.: Die Fleischbrücke in Nürnberg 1596–1598. Cottbus: Dissertation an der Fakultät für Architektur, Bauingenieurwesen und Stadtplanung der Brandenburgischen Technischen Universität 2005.
- [141] Schlegel, R.; Rautenstrauch, K.: Ein elastoplastisches Berechnungsmodell zur räumlichen Untersuchung von Mauerwerkstrukturen. *Bautechnik* 77 (2000), H. 6, S. 426–436.
- [142] Schlegel, R.; Will, J.; Fischer, D.; Rautenstrauch, K.: Tragfähigkeitsbewertung gemauerter Brückenbauwerke mit modernen Berechnungsmethoden am Beispiel der Göltzschtalbrücke. *Bautechnik* 80 (2003), H. 1, S. 15–23.
- [143] Schlegel, R.; Konietzky, H.; Rautenstrauch, K.: Mathematische Beschreibung von Mauerwerk unter statischer und dynamischer Beanspruchung im Rahmen der Diskontinuumsmechanik mit Hilfe der Distinkt-Element-Methode. *Mauerwerk* 9 (2005), H. 4, S. 143–151.
- [144] Barthel, R.: Tragverhalten und Berechnung gemauerter Kreuzgewölbe. *Bautechnik* 70 (1993), H. 7, S. 379–391.
- [145] Barthel, R.: Tragverhalten und Berechnung gemauerter Kreuzgewölbe. In: *Erhalten historisch bedeutsamer Bauwerke*, Jahrbuch 1992, hrsg. v. F. Wenzel, S. 21–40. Berlin: Ernst & Sohn 1994.
- [146] Coste, A.: La méthode des éléments finis appliqué à la restauration de la cathédrale de Beauvais. In: *Entre Mécanique et Architecture*, ed. par P. Radelet-de-Grave et E. Benvenuto, S. 348–360. Basel: Birkhäuser 1995.

- [147] Kooharian, A.: Limit Analysis of Voussoir (Segmental) and Concrete Arches. *Proceedings of the American Concrete Institute* 49 (1952), S. 317–328.
- [148] Onat, E. T.; Prager, W.: Limit Analysis of Arches. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 1 (1953), S. 77–89.
- [149] Prager, W.: *An Introduction to Plasticity*. London: Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1959.
- [150] Heyman, J.: The Stone Skeleton. *International Journal of Solids and Structures* 2 (1966), S. 249–279.
- [151] Heyman, J.: Teoría, historia y restauración de estructuras de fábrica. Colección de ensayos, ed. by S. Huerta. Madrid: Instituto Juan de Herrera 1995.
- [152] Heyman, J.: Arches, vaults and buttresses. *Collected essays*. Aldershot: Variorum, Ashgate Publishing 1996.
- [153] Huerta, S.: The use of simple models in the teaching of the essentials of masonry arch behaviour. In: *Theory and practice of constructions: knowledge, means and models*, ed. by G. Mocchi, Vol. 2, S. 747–761. Ravenna: DAPT Università di Bologna, Fondazione Flaminia 2005.
- [154] Jagfeld, M.; Barthel, R.: Zur Gelenkbildung in historischen Tragsystemen aus Mauerwerk. *Bautechnik* 81 (2004), H. 2, S. 96–102.
- [155] Huerta, S.; López Manzanares, G.: Stability and consolidation of an ashlar barrel vault with great deformations: the church of Guimarei. In: *Structural Studies, Repairs and Maintenance of Historical Buildings*, ed. by S. Sánchez-Beitia and C. A. Brebbia, S. 587–596. Southampton: Computational Mechanics Publications 1997.
- [156] Heyman, J.: The Safety of Masonry Arches. *International Journal of Mechanical Sciences* 11 (1969), S. 363–385.
- [157] Heyman, J.: *The Masonry Arch*. Chichester: Ellis Horwood 1982.
- [158] Heyman, J.: Westminster Hall Roof. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 37 (1967), S. 137–162.
- [159] Baker, J.; Heyman, J.: *Plastic Design of Frames. 1. Fundamentals*. Cambridge: Cambridge University Press 1969.
- [160] Graubner, C.-A.; Jäger, W.: Tragfähigkeit von unbewehrtem Mauerwerk unter zentrischer und exzentrischer Druckbeanspruchung nach DIN 1053–100. *Mauerwerk* 11 (2007), H. 1, S. 19–26.
- [161] Jäger, W.; Pflücke, T.; Schöps, P.: Kommentierte Technische Regeln für den Mauerwerksbau. Teil 1: DIN 1053–100: Mauerwerk – Berechnung auf der Grundlage des semiprobabilistischen Sicherheitskonzepts – Kommentare und Erläuterungen. In: *Mauerwerk-Kalender* 31 (2006), hrsg. v. H.-J. Irmschler, W. Jäger u. P. Schubert, S. 363–431. Berlin: Ernst & Sohn 2006.
- [162] Heyman, J.: Poleni's problem. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Part 1*, 84 (1988), S. 737–759.
- [163] Beckett Denison, E.: On the Mathematical Theory of Domes. *Memoirs of the Royal Institute of British Architects* (1871), S. 81–115.
- [164] Heyman, J.: On shell solutions of masonry domes. *International Journal of Solids and Structures* 3 (1967), S. 227–241.
- [165] Heyman, J.: *Equilibrium of Shell Structures*. Oxford: Clarendon Press 1977.
- [166] Oppenheim, I. J.; Gunaratnam, D. J.; Allen, R. H.: Limit State Analysis of Masonry Domes. *Journal of Structural Engineering*, Vol. 115 (1989), S. 868–882.
- [167] Corradi, M.: Considerazioni critiche sulle tecniche di consolidamento tradizionali dell'architettura. *Actas del Tercer Congreso Nacional de Historia de la Construcción*, S. 240–254. Cádiz, 26–28 de octubre de 2000. Madrid: Universidad de Sevilla, Instituto Juan de Herrera, SEHC, CEHOPU, COAATG 2005.
- [168] Terenzio, A.: La restauration du Panthéon de Rome. In: *La conservation des monuments d'art et d'histoire*, S. 280–285. Paris: Office International des Musées 1933.
- [169] Sabouret, V.: Les voûtes d'arêtes nervurées. Rôle simplement décoratif des nervures. *Le Génie Civil* 92 (1928), S. 205–209.
- [170] Abraham, Pol.: *Viollet-le-Duc et le rationalisme médiéval*. Paris: Vicent, Fréal et Cie. 1934.
- [171] Heyman, J.: Chronic Defects in Masonry Vaults: Sabouret's Cracks. *Monumentum* 26 (1983), S. 131–141.

- [172] Livesley, R. K.: Limit Analysis of Structures Formed from Rigid Blocks. *International Journal Numerical Methods in Engineering* 12 (1978), S. 1853–1871.
- [173] Sinopoli, A. (Ed.): *Arch Bridges. History, analysis, assessment, maintenance and repair*. Rotterdam: Balkema 1998.
- [174] O'Dwyer, D.: Funicular analysis of masonry vaults. *Computers and Structures* 73 (1999), S. 187–197.
- [175] Maunder, E. W. A.: Some structural studies of Exeter Cathedral. *Structural Engineer* 73 (1995), S. 105–110.
- [176] Kurrer, K.-E.: Baustatik und Ästhetik. *Stahlbau* 67 (1998), H. 3, S. 205–210.
- [177] Gerhardt, R.; Kurrer, K.-E.; Pichler, G.: The methods of graphical statics and their relation to the structural form. In: *Proceedings of the First International Congress on Construction History*, ed. by S. Huerta, Vol. II, S. 997–1006. Madrid: Instituto Juan Herrera 2003.
- [178] Block, P.; Ciblac, T.; Ochsendorf, J. A.: Real-time limit analysis of vaulted masonry buildings. *Computers and Structures* 84 (2006), S. 1841–1852.
- [179] Ochsendorf, J. A.: The masonry arch on spreading supports. *Structural Engineer* 84, n. 2 (2006), S. 29–35.
- [180] NN.: The Statics of Bridges. *The Civil Engineer and Architect's Journal* 24 (1861), S. 1–2, 60–65, 163–166, 223–226, 317–320, 347–349.
- [181] Heyman, J.: *The Science of Structural Engineering*. London: Imperial College Press 1999.

r  
2008

# MAUERWERK KALENDER

---

Herausgegeben von  
Wolfram Jäger, Dresden

33. Jahrgang

### **Hinweis des Verlages**

Die Recherche zum Mauerwerk-Kalender ab Jahrgang 1976 steht im Internet zur Verfügung unter [www.ernst-und-sohn.de](http://www.ernst-und-sohn.de)

Titelfoto: Abteikirche Saint-Savin-sur-Gartempe, Vienne/Frankreich (Foto: Sylvester Adams)

#### **Bibliografische Information Der Deutschen Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über [<http://dnb.d-nb.de>](http://dnb.d-nb.de) abrufbar.

© 2008 Ernst & Sohn

Verlag für Architektur und technische Wissenschaften GmbH, Berlin

Alle Rechte, insbesondere die der Übersetzung in andere Sprachen, vorbehalten. Kein Teil dieses Buches darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form – durch Fotokopie, Mikrofilm oder irgendein anderes Verfahren – reproduziert oder in eine von Maschinen, insbesondere von Datenverarbeitungsmaschinen, verwendbare Sprache übertragen oder übersetzt werden.

All rights reserved (including those of translation into other languages). No part of this book may be reproduced in any form - by photoprint, microfilm, or any other means – nor transmitted or translated into a machine language without written permission from the publishers.

Die Wiedergabe von Warenbezeichnungen, Handelsnamen oder sonstigen Kennzeichen in diesem Buch berechtigt nicht zu der Annahme, dass diese von jedermann frei benutzt werden dürfen. Vielmehr kann es sich auch dann um eingetragene Warenzeichen oder sonstige gesetzlich geschützte Kennzeichen handeln, wenn sie als solche nicht eigens markiert sind.

Satz: Dörr + Schiller GmbH, Stuttgart

Druck: betz-druck GmbH, Darmstadt

Buchbinder: Litges & Dopf GmbH, Heppenheim

Printed in the Federal Republic of Germany

ISBN 978-3-433-01871-2

ISSN 0170-4958